CONFLUENTES
MATHEMATICI

Masseye GAYE and Cheikh LO

Sur l'inexistence d'ensembles minimaux pour le flot horocyclique

Tome 9, n^{o} 1 (2017), p. 95-104.

<http://cml.cedram.org/item?id=CML_2017__9_1_95_0>

Confluentes Math.
9, 1 (2017) 95-104

SUR L'INEXISTENCE D'ENSEMBLES MINIMAUX POUR LE FLOT HOROCYCLIQUE

MASSEYE GAYE AND CHEIKH LO

Résumé. La dynamique topologique du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur le fibré tangent unitaire d'une surface hyperbolique S géométriquement finie est bien connue. En particulier sur une telle surface le flot $h_{\mathbb{R}}$ admet toujours des ensembles minimaux. Lorsque la surface S est géométriquement infinie, le comportement du flot horocyclique dépend de l'action du groupe fondamental $\pi_1(S)$ de la surface sur le bord à l'infini du plan hyperbolique. Le but de ce texte est de donner une condition d'inexistence d'ensembles minimaux pour le flot horocyclique et de l'utiliser pour construire une famille d'exemples de surfaces hyperboliques géométriquement infinies sur lesquelles le flot horocyclique est sans ensembles minimaux.

Abstract. (*On the non-existence of minimal sets for the horocycle flow*) The topological dynamics of the horocycle flow $h_{\mathbb{R}}$ on the unitary tangent bundle of a geometrically finite surface S is well known. In particular in this case a $h_{\mathbb{R}}$-minimal set exists always. When the surface is geometrically infinite, the behaviour of this flow depends on the action of the fundamental group $\pi_1(S)$ of the surface on the boundary of the hyperbolic plane. The aim of this paper is to give a non-existence condition of $h_{\mathbb{R}}$-minimal sets and use it to construct a family of geometrically infinite surfaces on which the horocyclic flow has no minimal sets.

1. Introduction

Soit S une surface hyperbolique. On considère l'action du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur son fibré unitaire tangent T^1S en restriction à son ensemble non-errant Ω_h. Lorsque la surface est géométriquement finie (i.e. son groupe fondamental est de type fini) la dynamique topologique du flot $h_{\mathbb{R}}$ est bien connue : les orbites horocycliques sont denses ou périodiques dans l'ensemble non-errant du flot, voir [5], [4], [2]. En particulier l'action du flot est minimale sur T^1S (i.e toutes les orbites sont denses) si et seulement si la surface S est compacte. Plus généralement le flot horocyclique en restriction à Ω_h admet toujours un *ensemble minimal* (i.e une partie de Ω_h fermée, non vide, $h_{\mathbb{R}}$-invariante qui ne contient aucun fermé propre, non vide et invariant par $h_{\mathbb{R}}$). Lorsque la surface hyperbolique S est géométriquement infinie (i.e son groupe fondamental est de type infini) l'ensemble Ω_h contient des orbites autres que denses et périodiques, voir [8]. Il est donc naturel de demander que devient la rigidité du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ observée dans le cadre géométriquement finie. Dans un article technique M. Kulikov construit des exemples de surfaces hyperboliques géométriquement infinies sur lesquelles le flot $h_{\mathbb{R}}$ n'admet pas d'ensembles minimaux, voir [6]. Sur ces exemples les orbites sont soit denses ou soit non fermées et non denses. Ces derniers types d'orbites sont appelées *orbites irrègulières*, voir [8]. Récemment dans [7] S. Matsumoto a montré que sur les surfaces hyperboliques géométriquement infinies de première espèce (i.e $\Omega_h = T^1S$), dites *tight surfaces*, construites par recollement de surfaces compactes avec des conditions sur le bord, le flot $h_{\mathbb{R}}$ n'admet pas d'ensembles minimaux.
L'objet de ce texte est de proposer un autre point de vue en donnant un critère

Classification math. : 37D40, 20H10, 14H55, 30F35.
Mots-clés : surface hyperbolique, ensemble minimal, orbite horocyclique, point limite.

d'inexistence d'ensembles minimaux pour le flot horocyclique qui repose sur la cardinalité des orbites irrégulières. Ce critère permet de donner une construction élémentaire d'une famille de surfaces hyperboliques différentes de celles obtenues par Matsumoto dont le flot horocyclique n'admet pas d'ensemble minimal. Cette construction fait appel à un dictionnaire entre la nature des orbites du flot horocyclique et celle des points de l'ensemble limite du groupe fuchsien correspondant. Avant d'énoncer ce critère définissons sur l'ensemble des orbites horocycliques une relation d'équivalence qui met en jeu le flot géodésique $g_{\mathbb{R}}$ sur T^1S. On dira que deux orbites horocycliques $h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ et $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ sont en relation s'il existe un réel t_0 tel que $g_{t_0}(h_{\mathbb{R}}(\pi(u))) = h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$. Deux telles orbites sont de même nature topologique.

Théorème 1.1. — *Soit S une surface hyperbolique géométriquement infinie. Si le flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ admet au plus un nombre dénombrable de classes d'équivalence d'orbites irrégulières, alors les seuls éventuels ensembles $h_{\mathbb{R}}$-minimaux sont ses orbites fermées.*

Corollaire 1.2. — *Soit S une surface hyperbolique géométriquement infinie. Si aucune trajectoire horocyclique n'est fermée dans l'ensemble non-errant et si l'ensemble des classes d'équivalence des orbites irrégulières est au plus dénombrable, alors le flot horocyclique restreint à Ω_h n'admet pas d'ensemble minimal.*

Dans la section 3 en utilisant un point de vue vectoriel du flot horocyclique nous démontrons le théorème 1.1 et dans la section 4, nous nous appuierons sur le lien entre la dynamique topologique du flot $h_{\mathbb{R}}$ sur T^1S et la nature des points limites du groupe fuchsien associé à la surface S pour illustrer le corollaire 1.2.

2. Préliminaires

Nous nous plaçons dans le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, muni de la métrique hyperbolique $ds^2 = \frac{|dz|^2}{(\operatorname{Im} z)^2}$. Soit G le groupe des isométries qui préservent l'orientation de $\mathbb{H}$, son action se prolonge en une action par homéomorphisme sur le bord à l'infini $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Ce groupe agit librement transitivement sur le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}$ et cette action permet d'identifier $T^1\mathbb{H}$ avec le groupe G. Rappelons qu'une isométrie directe de $\mathbb{H}$ différente de l'identité est dite *elliptique* (respectivement *parabolique*) si elle a exactement un point fixe dans $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ situé dans $\mathbb{H}$ (respectivement dans $\partial\mathbb{H}$) et elle est dite *hyperbolique* si elle a exactement deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}$. Un élément $v = (z; \vec{v})$ de $T^1\mathbb{H}$ définit une unique géodésique orientée $(v^-; v^+)$, d'extrémités v^+ et v^- dans $\partial\mathbb{H}$, et un unique horocycle $\mathcal{O}_{v^+}(z)$ passant par z qui est soit une droite horizontale si $v^+ = \infty$, soit un cercle euclidien tangent à l'axe réel au point v^+. On note $\operatorname{Int}(\mathcal{O}_{v^+}(z))$ l'horodisque de frontière $\mathcal{O}_{v^+}(z)$.

Soient Γ un *groupe fuchsien* (i.e un sous-groupe discret de G) et Λ son ensemble limite. Le groupe Γ est dit *non-élémentaire* si le cardinal de Λ est infini. Une surface hyperbolique S est le quotient de $\mathbb{H}$ par un groupe fuchsien Γ sans élément elliptique, $S = \Gamma \setminus \mathbb{H}$. Elle est munie de la métrique riemannienne induite par celle de $\mathbb{H}$ et $T^1S = \Gamma \setminus T^1\mathbb{H}$ est son fibré unitaire tangent. Un groupe fuchsien Γ (respectivement une surface hyperbolique S) est dit géométriquement fini s'il est de type fini, et géométriquement infini dans le cas contraire.

Soient $v = (z; \vec{v})$ un élément de $T^1\mathbb{H}$ et $(v(t))_{t\in\mathbb{R}}$ le paramétrage par unité de longueur d'arc de la géodésique orientée $(v^-; v^+)$ tel que $v(0) = z$. Le flot géodésique, $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ sur $T^1\mathbb{H}$ est défini par :

$$\tilde{g}_t(z, \vec{v}) = (v(t), \frac{dv}{dt}(t)).$$

Soit $(r(t))_{t\in\mathbb{R}}$ le paramétrage par unité de longueur d'arc de l'horocycle $\mathcal{O}_{v^+}(z)$ tel que $r(0) = z$ et $(\frac{dr}{dt}(0), \vec{v})$ est une base orthonormale directe de $T^1_z\mathbb{H}$. Le flot horocyclique, $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$ sur $T^1\mathbb{H}$ est défini par :

$$\tilde{h}_t(z, \vec{v}) = (r(t), \vec{v}(t))$$

où $\vec{v}(t)$ est l'élément de $T^1_{r(t)}\mathbb{H}$ tel que $(\frac{dr}{dt}(t), \vec{v}(t))$ soit une base orthonormale directe de $T^1_{r(t)}\mathbb{H}$. Les flots géodésique et horocyclique $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ et $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$ sur $T^1\mathbb{H}$ sont liés par la relation :

$$\tilde{g}_t \circ \tilde{h}_s = \tilde{h}_{s'} \circ \tilde{g}_t \;\; \forall\, t \;\in \mathbb{R}, \; \forall\, s \in \mathbb{R}, \; \text{avec } s' = e^{-t}s.$$

La projection sur $\mathbb{H}$ de l'orbite $\tilde{h}_{\mathbb{R}}(v)$ est l'horocycle $\mathcal{O}_{v^+}(z)$. Soit π la projection de $T^1\mathbb{H}$ dans T^1S. Les commutations de l'action de Γ avec les flots $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ et $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$ induisent les flots géodésique et horocyclique $g_{\mathbb{R}}$ et $h_{\mathbb{R}}$ sur T^1S. Un point $\pi(u) \in T^1S$ est dit *non-errant* par le flot $h_{\mathbb{R}}$ si pour tout voisinage U de $\pi(u)$ il existe une suite non bornée (t_n) de nombres réels telle que $h_{t_n}(U) \cap U \neq \emptyset$. L'ensemble des points non-errants par $h_{\mathbb{R}}$ est appelé *ensemble non-errant* du flot $h_{\mathbb{R}}$ et est noté Ω_h. La dynamique du flot horocyclique est concentrée sur son ensemble non-errant. Toute orbite horocyclique en dehors de Ω_h s'échappe à l'infini et est fermée.
Dans toute la suite de ce texte nous ne considèrons que des groupes fuchsiens géométriquement infinis.

3. Formulation vectorielle et Démonstration du théorème 1.1

Pour prouver le théorème 1.1 nous adoptons le point de vue vectoriel de l'action du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur le fibré tangent unitaire $T^1S = \Gamma\backslash T^1\mathbb{H}$. En termes algébriques, le flot horocyclique sur $\Gamma\backslash T^1\mathbb{H}$ est conjugué à l'action par translation à droite du groupe unipotent

$$U = \left\{ u_t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

sur $\Gamma\backslash PSL(2, \mathbb{R})$.

Par dualité, l'action de Γ sur

$$\mathbb{E} = (\mathbb{R}^2 \backslash \{(0; 0)\})/\{\pm Id\} \simeq PSL(2, \mathbb{R})/U$$

et celle sur l'espace des horocycles Hor($\mathbb{H}$) sont conjuguées. La dynamique du flot $h_{\mathbb{R}}$ sur T^1S se traduit donc en termes d'action linéaire du sous groupe discret Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{E}$. Et l'action de Γ sur le bord $\partial\mathbb{H}$ est conjuguée à son action projective sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. A un horocycle $\tilde{h}_{\mathbb{R}}(v)$ de $T^1\mathbb{H}$ on associe donc un vecteur $\overrightarrow{V}$

de $\mathbb{E}$ donné par :

$$\overrightarrow{V} = \psi(v) = \begin{cases} \pm \dfrac{e^{\frac{\beta_{v^+}(i,z)}{2}}}{\sqrt{(v^+)^2+1}} \begin{pmatrix} v^+ \\ 1 \end{pmatrix} & \text{si } v^+ \neq \infty, \\ \\ \pm e^{\frac{\beta_{v^+}(i,z)}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } v^+ = \infty. \end{cases}$$

Cette application ψ est une surjection continue, constante sur les trajectoires horocycliques, commute avec la projection π et vérifie $\psi(\tilde{g}_t(v)) = e^{\frac{t}{2}}\psi(v)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $v \in T^1\mathbb{H}$. Dans ce point de vue l'ensemble non-errant Ω_h correspond à l'ensemble $\mathbb{E}(\Gamma) = \left\{\overrightarrow{V} \in \mathbb{E} : v \in T^1\mathbb{H} \text{ et } v^+ \in \Lambda\right\}$. Cet ensemble est un fermé Γ-invariant. Pour plus de détails voir le chapitre 5 de [2].

En termes vectoriels les orbites horocycliques se classifient comme suit :

- l'orbite $h_\mathbb{R}(\pi(v))$ est dense dans Ω_h si et seulement s'il existe une suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ de Γ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||\gamma_n\overrightarrow{V}|| = 0$,
- l'orbite $h_\mathbb{R}(\pi(v))$ est périodique si et seulement si $\overrightarrow{V}$ est un vecteur propre pour un élément parabolique $\gamma \in \Gamma$,
- l'orbite $h_\mathbb{R}(\pi(v))$ est fermée et non périodique si et seulement si $\Gamma(\overrightarrow{V})$ est fermée et $\overrightarrow{V}$ n'est pas un vecteur propre de γ, pour tout $\gamma \in \Gamma\backslash\{Id\}$,
- l'orbite $h_\mathbb{R}(\pi(v))$ est irrégulière si et seulement si $\Gamma(\overrightarrow{V})$ n'est pas dense dans $\mathbb{E}(\Gamma)$ et $\Gamma(\overrightarrow{V})$ n'est pas fermée.

La relation d'équivalence sur l'ensemble des orbites horocycliques définie à l'introduction de ce texte se traduit dans ce cadre vectoriel par : deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{E}$ sont équivalents s'il existe un réel t_0 non nul tel que $\overrightarrow{V} = e^{\frac{t_0}{2}}\overrightarrow{U}$. Modulo cette relation d'équivalence le théorème 1.1 s'énonce :

Théorème 3.1. — *Si l'action linéaire d'un sous-groupe discret Γ de $PSL(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{E}(\Gamma)$ a au plus un nombre dénombrable de classes d'équivalence d'orbites non fermées et non denses, alors les seuls éventuels ensembles minimaux pour l'action de Γ sur $\mathbb{E}(\Gamma)$ sont ses orbites fermées.*

Pour démontrer le théorème 1.1 établissons les lemmes 3.2 et 3.3 suivants. Le premier lemme est indépendant de la cardinalité des orbites horocycliques.

Lemme 3.2. — *Soient Γ un groupe fuchsien non-élémentaire et $\pi(v) \in \Omega_h$. S'il existe un réel $t_0 \neq 0$ tel que $g_{t_0}\overline{h_\mathbb{R}(\pi(v))} \cap \overline{h_\mathbb{R}(\pi(v))} \neq \emptyset$ et si $\overline{h_\mathbb{R}(\pi(v))}$ est minimal, alors $\overline{h_\mathbb{R}(\pi(v))} = \Omega_h$.*

Démonstration. — Posons $F = \overline{h_\mathbb{R}(\pi(v))}$ et

$$M = g_{t_0}\overline{h_\mathbb{R}(\pi(v))} \cap \overline{h_\mathbb{R}(\pi(v))} = g_{t_0}F \cap F.$$

L'hypothèse $M \neq \emptyset$ et F minimal entrainent que $F = g_{t_0}F$. En effet si $f \in M$ et $s \in \mathbb{R}$, on a $h_s f \in F$ car F est $h_\mathbb{R}$-invariant. Puisque $f \in g_{t_0}F$, donc $f = g_{t_0}f'$ pour $f' \in F$, ce qui implique que $h_s f = h_s g_{t_0} f' = g_{t_0} h_{s'} f' \in g_{t_0}F$ car $h_{s'}f' \in F$ avec $s' = e^{-t_0}s$. Par suite $M = h_s M$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. Puisque l'ensemble $M \subset F$ est un fermé non vide, invariant par $h_\mathbb{R}$ et puisque F est $h_\mathbb{R}$-minimal, $M = F$. D'où $F = g_{t_0}F$. Nous avons donc $F = g_{t_0\mathbb{Z}}F$. Ce qui implique que pour tout

$k \in \mathbb{Z}$ on a $g_{kt_0}(\pi(v)) \in F = \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$; il existe donc une suite (s_n^k) de réels telle que $(h_{s_n^k}(\pi(v)) \to g_{kt_0}(\pi(v))$ lorsque $n \to +\infty$. En passant au point de vue vectoriel, cette convergence se traduit par l'existencce d'une suite $(\gamma_n^k)_{n\geqslant 1}$ de Γ telle que $\gamma_n^k(\overrightarrow{V})$ converge vers $e^{\frac{t_0 k}{2}}\overrightarrow{V}$. Et donc $||\gamma_n^k(\overrightarrow{V})||$ tend vers 0 lorsque $k \to -\infty$. Autrement dit $\overline{h_{\mathbb{R}}\pi(v)} = \Omega_h$. □

Lemme 3.3. — *Soit Γ un groupe géométriquement infini. Si le flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ sur $T^1S = \Gamma\backslash T^1\mathbb{H}$ admet au plus un nombre dénombrable de classes d'équivalence d'orbites irrégulières, alors pour toute orbite irrégulière $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$ n'est pas $h_{\mathbb{R}}$-minimal.*

Démonstration. — Soient $\{h_{\mathbb{R}}g_{\mathbb{R}}(\pi(v_i)) \,:\, i \in I\}$ les classes d"equivalence des orbites irrégulies, pour un $I \subseteq \mathbb{N}$. Soit $\pi(v) \in T^1S$ tel que $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ soit irrégulière. Comme l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ n'est ni fermée et ni dense dans Ω_h, il existe $\pi(u) \in \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} \setminus h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ et $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(u))} \neq \Omega_h$. Deux cas sont possibles :

- si $h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ est fermée alors l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$ n'est pas $h_{\mathbb{R}}$-minimal.
- si l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ est irrégulière, supposons que l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$ est $h_{\mathbb{R}}$-minimal. D'après le raisonnement précédent, pour tout $\pi(w) \in \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$, l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(w))$ est irrégulière et donc $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} \subset \bigcup_{i\in I} h_{\mathbb{R}}g_{\mathbb{R}}(\pi(v_i))$. Comme $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ n'est pas dense et $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$ est $h_{\mathbb{R}}$-minimal, d'après le lemme 3.2, pour tout $t \neq 0$ on a $g_t\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} \cap \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} = \emptyset$. Ce qui entraine qu'il existe $J \subseteq I$ et $\pi(w_j) \in \bigcup_{i\in I} h_{\mathbb{R}}g_{\mathbb{R}}(\pi(v_i))$ tels que $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))} = \bigcup_{j\in J} h_{\mathbb{R}}(\pi(w_j))$. Adoptons le point de vue vectoriel et considérons l'action de Γ sur $\mathbb{E}$ par dualité. À $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ nous associons $\Gamma\overrightarrow{V}$ et à $h_{\mathbb{R}}(\pi(w_j))$ nous associons $\Gamma\overrightarrow{W_j}$. Nous avons $M = \overline{\Gamma\overrightarrow{V}} = \{\gamma\overrightarrow{W_j} \,:\, \gamma \in \Gamma,\ j \in J\}$. Comme $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ n'est pas dense dans l'ensemble non-errant Ω_h du flot, alors il existe un réel $c > 0$ tel que $||x|| > c$ pour tout $x \in \overline{\Gamma\overrightarrow{V}}$. Par suite il existe un ouvert V de $(0;0)$ tel que $M \subset \mathbb{E} \setminus V$. L'ensemble M est donc un fermé de $\mathbb{E} \setminus V$. Donc (M, d) est un espace métrique complet où d est la distance induite par la distance euclidienne de $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, puisque $M = \overline{\Gamma\overrightarrow{V}}$ est minimal par l'action de Γ, pour tout $j \in J$, $\gamma \in \Gamma$ et $\gamma\overrightarrow{W_j} \in \overline{\Gamma\overrightarrow{V}}$, il existe une suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments distincts de Γ telle que la suite $(\gamma_n\overrightarrow{V})$ converge vers $\gamma\overrightarrow{W_j}$. Autrement dit, pour tout voisinage U de $\gamma\overrightarrow{W_j}$ il existe un entier N tel que $\gamma_n\overrightarrow{V} \in U$ pour tout $n \geqslant N$. Donc $\{\gamma\overrightarrow{W_j}\}$ est d'intérieur vide dans M pour la topologie induite. Par suite M est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide ; par la propriété de Baire, M est d'intérieur vide. Ce qui est impossible car (M, d) est un espace métrique complet. D'où l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$ n'est pas $h_{\mathbb{R}}$-minimal. □

Démonstration du Théorème 1.1. — Le théorème est une conséquence immédiate des lemmes ci-dessus. En effet si un ensemble $C \subset \Omega_h$ est $h_{\mathbb{R}}$-minimal alors il existe $v \in T^1\mathbb{H}$ tel que $C = \overline{h_{\mathbb{R}}(\pi(v))}$. On sait que l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ ne peut être dense sinon le flot $h_{\mathbb{R}}$ restreint à Ω_h serait minimal ce qui est impossible car Ω_h contient au moins une orbite non dense. L'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ n'est également pas irrégulière d'après le lemme 3.3. D'où l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ ne peut être que fermée. □

4. Exemples

Nous allons illustrer les résultats de la section précédente à travers une famille de surfaces hyperboliques dont l'ensemble non-errant Ω_h est différent de T^1S. Pour celà nous changeons de paradigme en analysant les points de l'ensemble limite Λ du groupe fuchsien Γ et en les reliant aux orbites horocycliques. Dans l'ensemble limite Λ on distingue différentes sortes de points :

- un point ξ de Λ est dit *horocyclique* si pour tout horodisque $\mathrm{Int}(\mathcal{O}_\xi(w))$, l'ensemble $\Gamma.0\cap\mathrm{Int}(\mathcal{O}_\xi(w))$ est infini. On note Λ_h l'ensemble de ces points.
- un point ξ de Λ est dit *discret* si pour tout horodisque $\mathrm{Int}(\mathcal{O}_\xi(w))$, l'ensemble $\Gamma.0\cap\mathrm{Int}(\mathcal{O}_\xi(w))$ est fini. On note Λ_d l'ensemble de ces points.
- un point ξ de Λ est dit *parabolique* s'il est fixé par une isométrie parabolique de Γ. On note Λ_p l'ensemble de ces points.
- un point ξ de Λ est dit *irrégulier* s'il n'est ni horocyclique, ni discret et ni parabolique. On note Λ_{irr} l'ensemble de ces points.

Les ensembles Λ_h, Λ_d, Λ_p et Λ_{irr} sont deux à deux disjoints, Γ-invariants et vérifient : $\Lambda=\Lambda_h\cup\Lambda_d\cup\Lambda_p\cup\Lambda_{irr}$. La finitude géométrique d'un groupe fuchsien se lit sur les points de Λ. Plus précisément Γ est géométriquement fini si et seulement si $\Lambda=\Lambda_h\cup\Lambda_p$, voir [2] . Donc Γ est géométriquement infini si et seulement si $\Lambda_d\cup\Lambda_{irr}\neq\emptyset$, voir [3].
Nous utiliserons le critère d'horocyclicité suivant.

Lemme 4.1. — *Un point limite $\xi\neq\infty$ est horocyclique s'ils existent une suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de Γ et une suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ de points de la géodésique verticale $(\xi;\infty)$, tels que $w_n\to\xi$ lorsque $n\to+\infty$ et $\gamma_n(w_n)\notin\mathrm{Int}(\mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}(i))$.*

Démonstration. — Puisque $\xi\neq\infty$ et $w_n\to\xi$, on a $\mathrm{Im}(w_n)\to 0$. Or, l'hypothèse $\gamma_n(w_n)\notin\mathrm{Int}(\mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}(i))$ est équivalente à $w_n\notin\mathrm{Int}(\mathcal{O}_\xi(\gamma_n^{-1}(i)))$. Donc comme w_n appartient à la géodésique $(\xi;\infty)$, en notant $ray(\mathcal{O}_\xi(\gamma_n^{-1}(i)))$ le rayon euclidien de l'horocycle $\mathcal{O}_\xi(\gamma_n^{-1}(i))$, on a $ray(\mathcal{O}_\xi(\gamma_n^{-1}(i)))\leqslant\frac{\mathrm{Im}(w_n)}{2}$ et $ray(\mathcal{O}_\xi(\gamma_n^{-1}(i)))\to 0$. D'où par définition $\xi\in\Lambda_h$. □

Rappelons qu'un élément $\pi(v)$ de T^1S appartient à Ω_h si et seulement si l'extrémité v^+ appartient à l'ensemble Λ. Il existe une correspondance entre la nature topologique de $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ avec $\pi(v)\in\Omega_h$ et la nature du point limite $v^+\in\Lambda$, voir [8] et [3]. Plus précisément on a :

- l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est dense dans Ω_h si et seulement si $v^+\in\Lambda_h$,
- l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est périodique si et seulement si $v^+\in\Lambda_p$,
- l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est fermée et non périodique si et seulement si $v^+\in\Lambda_d$,
- l'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ est irrégulière (orbite qui n'est ni fermée, ni dense dans Ω_h) si et seulement si $v^+\in\Lambda_{irr}$.

Notons que si deux orbites horocycliques $h_{\mathbb{R}}(\pi(u))$ et $h_{\mathbb{R}}(\pi(v))$ sont dans la même classe d'équivalence modulo le flot géodésique alors $v^+\in\Gamma.u^+$. Ainsi en termes de points limites le corollaire 1.2 s'énonce :

Corollaire 4.2. — *Soit Γ un groupe géométriquement infini. Si*

$$\Lambda_{irr}=\bigcup_{i\in I}(\Gamma.\xi_i)$$

pour un $I \subseteq \mathbb{N}$ et si $\Lambda_p \cup \Lambda_d = \emptyset$, alors le flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ restreint à son ensemble non-errant Ω_h n'admet pas d'ensemble minimal.

Plaçons nous dans le demi-plan de Poincaré, $\mathbb{H}$ et considérons une famille de demi-cercles euclidiens, $(S_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de centres $c_k \in \mathbb{R}_+^*$ et de rayons r_k tels que

$$c_k \to +\infty, \qquad c_{k+1} - r_{k+1} > c_k + r_k \qquad \text{et} \qquad c_1 - r_1 > 0.$$

Posons $S_{-k} = \sigma(S_k)$, où σ est la réflexion par rapport à l'axe imaginaire. Pour tout entier relatif non nul k notons D_k le demi-disque euclidien ouvert délimité par S_k, et E_k son complémentaire dans $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$. Remarquons que les cercles S_k sont deux à deux disjoints extérieurement. Soit h_k l'isométrie hyperbolique de $\mathbb{H}$ définie par $h_k(z) = -c_k - \frac{r_k^2}{z-c_k}$. Elle vérifie $h_k(S_k) = S_{-k}$ et $h_k(E_k) = D_{-k}$. Remarquons que $h_k^{-1} = h_{-k}$ et que S_k est le *cercle d'isométrie* de h_k (i.e. $S_k = \{z \in \mathbb{H} : |(h_k)'(z)| = 1\}$). De plus si $z \in E_k$ alors $|(h_k)'(z)| \leqslant 1$. En utilisant la dynamique du "ping-pong" on montre que le groupe $\Gamma =< h_k >_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un groupe fuchsien sans torsion, sans élément parabolique, voir [1]. Le groupe fuchsien Γ ainsi construit est appelé *groupe de Schottky de demi-cercles symétriques*. Notons $\mathcal{A} = \{h_k; h_{-k}, k \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble des générateurs de Γ et de leurs inverses. Tout élément différent de l'identité g de Γ s'écrit sous la forme réduite $g = h_{k_1}...h_{k_p}$ où les $h_{k_j} \in \mathcal{A}$ et $k_{j+1} + k_j \neq 0$, pour $0 < j \leqslant p-1$. Il en résulte un codage unique de l'élément g par *la suite finie réduite* $[k_1, ..., k_p]$, $p > 0$. Pour tout $w \in \Delta = \cap_{k\in\mathbb{Z}^*} E_k$, on a $g(w) \in D_{-k_1}$. Le point ∞ est l'unique point d'accumulation de la famille $(S_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ donc l'ensemble limite Λ de Γ a un codage simple en termes de suites réduites (finies ou infinies). Le point ∞ correspond à la suite vide, tout point $h_{k_1}...h_{k_p}(\infty)$ est représenté par une suite finie $(k_1, ..., k_p)$ et un point ξ de $\Lambda\backslash\Gamma(\infty)$ correspond à une suite infinie $(k_1, k_2, ...)$ avec $\xi = \lim\limits_{p\to\infty} h_{k_1}...h_{k_p}(i)$, voir [3].

Lemme 4.3. — *Le point ∞ n'est pas un point limite horocyclique.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que si le point $\infty \in \Lambda_h$, alors il existe une suite (γ_n) d'éléments de Γ telle que $\mathrm{Im}(\gamma_n(i)) \to +\infty$. Montrons que pour toute isométrie $\gamma \in \Gamma$, nous avons $\mathrm{Im}(\gamma(i)) \leqslant 1$. Soit $\gamma \neq Id$ et $\gamma = h_{k_1}...h_{k_p}$ son écriture réduite. Nous savons que pour tout $h_k \in \mathcal{A}$, $h_k(i) \in D_{-k}$ et $|h_k'(i)| < 1$. De même $h_{k_j}...h_{k_l}(i) \in D_{-k_j} \subset E_{k_{j-1}}$ et $|(h_{k_{j-1}})'[h_{k_j}...h_{k_l}(i)| \leqslant 1$, pour tout $1 \leqslant j \leqslant l \leqslant p$. Ainsi nous avons

$$|\gamma'(i)| = |(h_{k_1}...h_{k_p})'(i)| = |h_{k_p}'(i) \times (h_{k_{p-1}})'(h_{k_p}(i)) \times ... \times (h_{k_1})'(h_{k_2}...h_{k_p}(i))| \leqslant 1.$$

Remarquons également que $|g'(i)| = \mathrm{Im}(g(i))$ pour toute isométrie positive g telle que $g(\infty) \neq \infty$. Par conséquent $\mathrm{Im}(\gamma(i)) \leqslant 1$. D'où $\infty \notin \Lambda_h$. □

A partir de maintenant nous spécifions les centres et rayons des demi-cercles S_k en posant $c_k = Q^k$ et $r_k = \lambda Q^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, $Q > 1$ et $0 < \lambda < \frac{Q-1}{Q+1} < 1$. Dans toute la suite du texte Γ est le groupe de Schottky de demi-cercles symétriques obtenu avec ces paramètres Q et λ. Nous avons la propriété suivante.

Proposition 4.4. — *Le point ∞ est un point limite irrégulier.*

Démonstration. — Puisque les $c_k \to +\infty$, on a $\infty \in \Lambda$. D'aprés le corollaire 4.3 le point $\infty \notin \Lambda_h$. Par ailleurs Γ ne contient pas d'isométrie parabolique et

$$\lim_{k\to\infty} (\mathrm{Im}\, h_k(i)) = \lim_{k\to\infty} \frac{r_k^2}{1 + c_k^2} = \lambda^2 \neq 0$$

donc $\infty \notin \Lambda_p \cup \Lambda_d$. D'où ∞ est un point limite irrégulier. $\square$

Enonçons le lemme suivant relatif à la famille des demi-cercles symétriques $(S_k)_{k\in\mathbb{Z}^*}$.

Lemme 4.5. — *Il existe $\delta > 0$ tel que quelque soit deux demi-cercles différents S_p et S_q, si le demi-cercle S_q et l'horocycle $\mathcal{O}_\eta(i)$ avec $\eta \in [c_p - r_p; c_p + r_p]$ sont sécants alors*

$$(\mathrm{Int}(\mathcal{O}_\eta(i)) \bigcap D_q) \subset \{z \in \mathbb{H} : \mathrm{Im}\, z \geqslant \delta\}.$$

Démonstration. — Soit $z_0 \in \mathbb{H}$ le point d'intersection de $\mathcal{O}_\eta(i)$ et de S_q dont la partie imaginaire est la plus petite. Nous avons :

$$\begin{cases} z_0 \in S_q & \Rightarrow z_0 = c_q + r_q e^{i\theta}, \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < \pi \text{ et } \theta \neq \frac{\pi}{2}, \\ z_0 \in \mathcal{O}_\eta(i) & \Rightarrow \mathrm{Im}\, z_0 = \frac{|z_0-\eta|^2}{1+\eta^2}. \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\mathrm{Im}\, z_0 = \frac{|\, c_q + r_q e^{i\theta} - \eta \,|^2}{1+\eta^2} = \frac{(c_q-\eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q-\eta)\cos\theta}{1+\eta^2}.$$

Supposons que $p > 0$, le cas $p < 0$ se traite exactement de la même manière.

Nous avons $0 < c_p - r_p \leqslant \eta \leqslant c_p + r_p$ et par suite :

$$\frac{1}{1+\eta^2} \geqslant \frac{1}{1+(c_p+r_p)^2} \geqslant \frac{1}{Q^{2p}[1+(1+\lambda)^2]}$$

car $Q > 1,\ c_p = Q^p$ et $r_p = \lambda Q^p$.

• Si $0 < q < p$, alors nous avons $0 < c_q - r_q < c_q + r_q < c_p - r_p \leqslant \eta \leqslant c_p + r_p$ et $(c_q - \eta) < (c_q - \eta)\cos\theta < -(c_q - \eta)$. Donc

$$\begin{aligned} (c_q-\eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q-\eta)\cos\theta &\geqslant (c_q - \eta + r_q)^2 \geqslant [(c_p - r_p) - (c_q + r_q)]^2 \\ &\geqslant Q^{2p}[(1-\lambda) - (1+\lambda)Q^{q-p}]^2 \\ &\geqslant Q^{2p}[(1-\lambda) - (1+\lambda)Q^{-1}]^2, \end{aligned}$$

car $q - p \in]-\infty; -1]$ et $Q > 1$. Et il s'en suit que $\mathrm{Im}\, z_0 \geqslant \frac{[(1-\lambda)-(1+\lambda)Q^{-1}]^2}{1+(1+\lambda)^2} = \delta_1$.

• Si $0 < p < q$, alors nous avons $0 < c_p - r_p \leqslant \eta \leqslant c_p + r_p < c_q - r_q < c_q + r_q$ et $-(c_q - \eta) < (c_q - \eta)\cos\theta < (c_q - \eta)$. Donc

$$\begin{aligned} (c_q-\eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q-\eta)\cos\theta &\geqslant (c_q - \eta - r_q)^2 \geqslant [(c_q - r_q) - (c_p + r_p)]^2 \\ &\geqslant Q^{2p}[(1-\lambda)Q^{q-p} - (1+\lambda)]^2 \\ &\geqslant Q^{2p}[(1-\lambda)Q - (1+\lambda)]^2 \end{aligned}$$

car $q - p \in [1; +\infty[$ et $Q > 1$. Et il s'en suit que $\mathrm{Im}\, z_0 \geqslant \frac{[(1-\lambda)Q-(1+\lambda)]^2}{1+(1+\lambda)^2} = \delta_2$.

• Si $q < 0 < p$, alors nous avons $c_q - r_q < c_q + r_q < 0 < c_p - r_p \leqslant \eta \leqslant c_p + r_p$ et $(c_q - \eta) < (c_q - \eta)\cos\theta < -(c_q - \eta)$. Donc

$$\begin{aligned} (c_q-\eta)^2 + r_q^2 + 2r_q(c_q-\eta)\cos\theta &\geqslant (c_q - \eta + r_q)^2 \geqslant [(c_p - r_p) - (c_q + r_q)]^2 \\ &\geqslant Q^{2p}(1-\lambda)^2(1 + Q^{-p-q})^2 \\ &\geqslant Q^{2p}(1-\lambda)^2. \end{aligned}$$

Et il s'en suit que $\mathrm{Im}\, z_0 \geqslant \frac{(1-\lambda)^2}{1+(1+\lambda)^2} = \delta_3$.

En posant $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, nous obtenons $\operatorname{Im} z_0 \geqslant \delta$. Comme $\operatorname{Im} z_0 \leqslant \operatorname{Im} z$ pour tout $z \in \operatorname{Int}(\mathcal{O}_\eta(i)) \bigcap D_q$, nous avons

$$\operatorname{Int}(\mathcal{O}_\eta(i)) \bigcap D_q \subset \{z \in \mathbb{H} : \operatorname{Im} z \geqslant \delta\}. \qquad \square$$

LEMME 4.6. — *L'ensemble Δ est le domaine de Dirichlet de Γ centré au point i.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que pour tout $\gamma \in \Gamma \backslash \{Id\}$ on a $\gamma(i) \neq i$. Donc le domaine de Dirichlet $\Delta_i(\Gamma)$ de Γ, centré en i, est bien défini. Montrons à présent que $\Delta_i(\Gamma) = \Delta$. Nous savons $h_{-k}(i) = [c_k - \frac{c_k r_k^2}{1+c_k^2}] + i\frac{r_k^2}{1+c_k^2}$ et donc pour tout $z \in S_k$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{|z - h_{-k}(i)|^2}{\operatorname{Im}(h_{-k}(i))} &= \frac{1+c_k^2}{r_k^2}\left[\left(r_k\cos\theta + \frac{c_k r_k^2}{1+c_k^2}\right)^2 + \left(r_k \sin\theta - \frac{r_k^2}{1+c_k^2}\right)^2\right] \\
&= \frac{1+c_k^2}{r_k^2}\left[\left(\frac{r_k(1+c_k^2)\cos\theta + c_k r_k^2}{1+c_k^2}\right)^2 + \left(\frac{r_k(1+c_k^2)\sin\theta - r_k^2}{1+c_k^2}\right)^2\right] \\
&= 1 + c_k^2 + r_k^2 + 2r_k(c_k\cos\theta - \sin\theta) \\
&= 1 + c_k^2 + r_k^2\cos^2\theta + r_k^2\cos^2\theta + 2r_k c_k \cos\theta - 2r_k \sin\theta \\
&= (c_k + r_k\cos\theta)^2 + (r_k\sin\theta - 1)^2 = |z - i|^2.
\end{aligned}$$

Par suite S_k est la médiatrice du segment géodésique $[i, h_{-k}(i)]$. Comme

$$\Delta_i(\Gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma\backslash\{Id\}} \Delta_i(\gamma),\ \Delta_i(h_k) = E_k \text{ et } \Delta = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}^*} E_k,$$

nous avons $\Delta_i(\Gamma) \subset \Delta$. Inversement si $\Delta_i(\Gamma)$ était une partie propre de Δ, ils existeraient $z \in \Delta_i(\Gamma)$ et $\gamma \in \Gamma\backslash\{Id\}$ tels que $\gamma(z) \in \operatorname{Int}(\Delta)$. Or en écrivant $\gamma = h_{k_1}...h_{k_n}$ nous obtenons $\gamma(z) = h_{k_1}...h_{k_n}(z) \in D_{k_1}$, ce qui est impossible car $\operatorname{Int}(\Delta) \cap D_{k_1} = \emptyset$. $\square$

PROPOSITION 4.7. — *Tout point limite de $\Lambda\backslash\Gamma(\infty)$ est un point limite horocyclique.*

Démonstration. — Soit $\xi \in \Lambda\backslash\Gamma(\infty)$. Puisque ξ n'est pas sur l'orbite de l'infini alors il est codé par une suite réduite infinie, $(k_1, k_2, ...)$. Il existe alors une suite d'entiers $(p_n)_{n\geqslant 1}$ telle que pour tout n, $n \leqslant p_n$, $k_{p_n} \in (k_1, k_2, ...)$ et $p_n \to +\infty$. Pour tout entier n soit un point $w_n \in h_{k_1}...h_{k_{n-2}}(\Delta) \cap (\xi; \infty)$. Nous avons, $w_n \to \xi$, lorsque $n \to +\infty$. En posant $\gamma_n = [-k_{p_n-1}, ..., -k_1]$, nous obtenons alors

$$\gamma_n(w_n) \in h_{-k_{p_n-1}}...h_{-k_{n-1}}(\Delta) \subset h_{-k_{p_n-1}}...h_{-k_n}(\overline{D_{k_{n-1}}}) \subset D_{k_{p_n-1}}$$

et $\gamma_n(\xi) \in \overline{D_{-k_{p_n}}}$. Posons

$$D_{p_n-1;n-1} = h_{-k_{p_n-1}}...h_{-k_n}(\overline{D_{k_{n-1}}}),$$

et notons $\operatorname{diam}(D_{p_n-1;n-1})$ son diamètre euclidien. Montrons que

$$D_{p_n-1;n-1} \bigcap \operatorname{Int}(\mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}(i)) = \emptyset.$$

Si le demi-cercle $S_{k_{p_n-1}}$ et l'horocycle $\mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}(i)$ sont disjoints ou tangents alors $D_{p_n-1;n-1} \bigcap \operatorname{Int}(\mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}(i)) = \emptyset$. Si le demi-cercle $S_{k_{p_n-1}}$ et l'horocycle $\mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}(i)$

sont sécants, alors d'aprés le lemme 4.5

$$D_{p_n-1;n-1} \bigcap \mathrm{Int}(\mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}(i)) \subset \{z \in \mathbb{H} : \mathrm{Im}\, z \geqslant \delta\}.$$

Comme Δ est un domaine de Dirichlet alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{diam}(D_{p_n-1;n-1}) = 0$ et donc pour n assez grand, $\mathrm{diam}(D_{p_n-1;n-1}) < \delta$. Ainsi $D_{p_n-1;n-1} \bigcap \mathrm{Int}(\mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}(i)) = \emptyset$ et ceci montre que $\gamma_n(w_n) \notin \mathrm{Int}(\mathcal{O}_{\gamma_n(\xi)}(i))$, pour tout n. D'où $\xi \in \Lambda_h$ d'après le lemme 4.1. □

Théorème 4.8. — *Soit S la surface $\Gamma\backslash\mathbb{H}$. Le flot horocyclique sur T^1S en restriction à son ensemble non-errant n'admet pas d'ensemble minimal.*

Démonstration. — Les propositions 4.4 et 4.7 entrainent que l'ensemble limite Λ de Γ se décompose comme suit : $\Lambda = \Lambda_h \cup \Lambda_{irr}$ avec $\Lambda_{irr} = \Gamma.\infty$. Donc d'aprés le corollaire 4.2 le flot horocyclique restreint à son ensemble non-errant n'admet pas d'ensemble minimal. □

Remerciements

Nous remercions Françoise Dal'Bo. Ce travail a reçu le soutien financier de la Fondation SIMON'S.

Références

[1] A. F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.
[2] F. Dal'Bo, *Trajectoires géodésiques et horocycliques*, Savoirs Actuels, EDPS-CNRS, 2007.
[3] F. Dal'Bo et A.N. Starkov, On a classification of limit points of infinitely generated Schottky groups, *J. Dyn. control Sys.*, 6(4) :561–578, 2000.
[4] E. Ghys, Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes, *Sém. Bourbaki*, 34 :93–136, 1991-1992.
[5] G. A. Hedlund, Fuchsian groups and transitive horocycles, *Duke Math. J.*, 2(3) :530–542, 1936.
[6] M. Kulikov, The horocycle flow without minimal sets, *C.R. A.S.*, 1338 :477–480, 2004.
[7] S. Matsumoto, Horocycle flow without minimal sets, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 23(3) :661–673, 2016.
[8] A. N. Starkov, Fuchsian groups from the dynamical viewpoint, *J. Dyn. control Sys.*, 1(3) :427–445, 1995.

Manuscrit reçu le 27 décembre 2016,
révisé le 8 mai 2017,
accepté le 9 mai 2017.

Masseye GAYE & Cheikh LO
Laboratoire Géométrie et Application (LGA), Département Mathématique et Informatique, UCAD-DAKAR, Senegal.
masseye.gaye@ucad.edu.sn (Corresponding author)
gaindefatmalo@yahoo.fr