

# CONFLUENTES MATHEMATICI

Gaël RÉMOND

**Action de groupe et semi-stabilité du produit tensoriel**

Tome 11, n° 1 (2019), p. 53-57.

<[http://cml.cedram.org/item?id=CML\\_2019\\_\\_11\\_1\\_53\\_0](http://cml.cedram.org/item?id=CML_2019__11_1_53_0)>

© Institut Camille Jordan, 2019, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Confluentes Mathematici » (<http://cml.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://cml.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## ACTION DE GROUPE ET SEMI-STABILITÉ DU PRODUIT TENSORIEL

GAËL RÉMOND

**Résumé.** Nous démontrons une conjecture de Coulangeon et Nebe, qui est un cas particulier d'une conjecture de Bost. Étant donné deux espaces vectoriels métrisés semi-stables sur un corps de nombres, nous montrons que leur produit tensoriel est encore semi-stable s'il y a un groupe qui agit sans multiplicités sur un des espaces.

**Abstract.** (*Group action and semi-stability of the tensor product*) We prove a conjecture of Coulangeon and Nebe which is a special case of a conjecture of Bost. Given two semi-stable metrized vector spaces over a number field we show that their tensor product is also semi-stable whenever there is a group acting on one of the spaces in a multiplicity-free way.

### 1. INTRODUCTION

Nous démontrons dans cette note un cas particulier d'une conjecture de Bost. Nous utilisons le langage des espaces adéliques rigides sur une extension algébrique de  $\mathbb{Q}$ , introduit dans [3] (voir les rappels ci-dessous). Il serait complètement équivalent de parler de fibrés vectoriels hermitiens sur  $\text{Spec}\mathcal{O}_K$  comme Bost ou de  $\mathcal{O}_K$ -réseaux comme Coulangeon et Nebe [1] pour un corps de nombres  $K$ .

**THÉORÈME 1.1.** — *Soient  $K$  une extension algébrique de  $\mathbb{Q}$  et  $E, F$  deux espaces adéliques rigides sur  $K$ . On suppose qu'il existe un groupe  $G$  agissant sur l'espace adélique  $E \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}$  de sorte que  $E \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}$  soit la somme directe de sous- $\overline{\mathbb{Q}}$ -espaces vectoriels  $G$ -irréductibles deux à deux non isomorphes. Alors*

$$\mu_{\max}(E \otimes F) = \mu_{\max}(E) + \mu_{\max}(F).$$

La conjecture de Bost prédit que ceci devrait être vrai sans aucune hypothèse d'action de groupe. Nous renvoyons à [1] pour plus de contexte et d'autres résultats connus sur cette conjecture. Notre énoncé établit la conjecture 2 de [1] et généralise le résultat principal de cet article qui prouvait l'égalité de pentes en supposant de plus que

- (1)  $E$  et  $F$  sont définis sur un corps de nombres CM,
- (2) il existe une seconde action d'un groupe  $H$  sur  $F \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}$  vérifiant la même condition,
- (3)  $E \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}$  est somme d'au plus deux composantes irréductibles.

Après des rappels et préparatifs dans la partie suivante, nous montrons le théorème dans la partie 3. L'hypothèse sur  $G$  sert uniquement, comme dans le texte de Coulangeon et Nebe dont nous utilisons la proposition 2.2, à établir que le sous-espace déstabilisant de  $E \otimes F$  s'écrit (après extension des scalaires) sous la forme

$$\bigoplus_{i=1}^n E_i \otimes F_i \quad \text{où} \quad E = \bigoplus_{i=1}^n E_i \quad \text{et} \quad F_1, \dots, F_n \subset F.$$

---

*Classification Mathématique (2010):* 11G50, 11H06, 14G40.

*Mots-clés:* conjecture de Bost, espaces adéliques rigides, pente maximale, semi-stabilité.

Le reste de la démonstration consiste à minorer (par récurrence) la hauteur d'un tel sous-espace du produit tensoriel : en termes de pentes, nous montrons (voir corollaire 3.2) pour tous sous-espaces  $E_i$  et  $F_i$  comme ci-dessus

$$\mu\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i \otimes F_i\right) \leq \mu_{\max}(E) + \mu_{\max}(F).$$

## 2. PRÉLIMINAIRES

Nous rappelons les définitions de la partie 3 de [3] reprises dans le paragraphe 2.2 de [2] (voir aussi le paragraphe 3.2 de ce second texte pour les pentes).

Soient  $K$  une extension algébrique de  $\mathbb{Q}$ ,  $V(K)$  l'ensemble de ses places et  $\mathbb{A}_K$  ses adèles. Un espace adélique sur  $K$  est un couple  $(E, (\|\cdot\|_v)_{v \in V(K)})$  formé d'un espace vectoriel  $E$  sur  $K$  de dimension finie et d'une collection de normes  $\|\cdot\|_v$  sur  $E \otimes K_v$  pour tout  $v \in V(K)$ . Par abus de notations, nous notons  $E$  ce couple. L'espace adélique standard  $K^n$  ( $n \geq 1$ ) est donné par les normes

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n)\|_{K^n, v} &= \max(|x_1|_v, \dots, |x_n|_v) && \text{si } v \text{ est ultramétrique et} \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_{K^n, v} &= (|x_1|_v^2 + \dots + |x_n|_v^2)^{1/2} && \text{si } v \text{ est archimédienne.} \end{aligned}$$

Un espace adélique  $E$  de dimension  $n \geq 1$  est dit rigide s'il existe une matrice  $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$  et une base  $e_1, \dots, e_n$  de  $E$  de sorte que pour tout  $v \in V(K)$  et tout  $X = (x_1, \dots, x_n) \in K_v^n$  on a

$$\|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|_{E, v} = \|A_v X\|_{K^n, v}.$$

Il y a une notion naturelle d'extension des scalaires pour les espaces adéliques rigides : si  $K \subset L$  et si  $E$  est un espace adélique rigide sur  $K$ , on définit des normes sur  $E \otimes_K L$  en utilisant la même formule pour une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  et une matrice  $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ . Comme toute telle matrice adélique est à coefficients dans les adèles d'un corps de nombres, tout espace adélique rigide est l'extension d'un espace sur un corps de nombres  $K_0$  (on dit aussi que  $E$  est défini sur  $K_0$ ).

Nous définissons maintenant la hauteur d'un espace adélique rigide  $E$  sur  $K$ . Fixons pour cela un corps de nombres  $K_0$  sur lequel  $E$  est défini et  $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{K_0})$  une matrice adélique correspondante. On pose

$$H(E) = \prod_{v \in V(K_0)} |\det A_v|_v^{[(K_0)_v : \mathbb{Q}_v] / [K_0 : \mathbb{Q}]}.$$

On vérifie directement que ceci est indépendant du choix de  $K_0$  et  $A$  et que l'on obtient une notion stable par extension des scalaires. Lorsque  $E$  est non nul, nous introduisons sa hauteur réduite

$$H_r(E) = H(E)^{1/\dim E}$$

puis sa hauteur (réduite) minimale

$$H_{\min}(E) = \inf\{H_r(F) \mid 0 \neq F \subset E\}.$$

On montre que cet infimum est atteint et qu'il existe même un unique sous-espace  $F$  de dimension maximale vérifiant  $H_r(F) = H_{\min}(E)$ . On l'appelle sous-espace déstabilisant de  $E$  (voir le lemme 14 de [2]). Ici l'unicité permet de montrer que  $H_{\min}(E)$  est invariant par extension des scalaires. De même, si un groupe  $G$  agit

sur l'espace adélique  $E$  (ce qui signifie que pour tout  $g \in G$  l'action de  $g$  sur  $E \otimes K_v$  est une isométrie), alors le sous-espace déstabilisant est stable sous l'action de  $G$ .

Les hauteurs définies ci-dessus ont des avatars logarithmiques traditionnellement notés  $\deg = -\log H$  (degré d'Arakelov),  $\mu = -\log H_r$  (pente) et  $\mu_{\max} = -\log H_{\min}$  (pente maximale).

Si  $A$  est un sous-espace vectoriel d'un espace adélique rigide  $E$ , il hérite par restriction de normes d'une structure adélique rigide (déjà utilisée pour définir  $H_{\min}(E)$  ci-dessus). De même les normes d'opérateur donnent une telle structure sur le dual  $E^\vee$  et, par restriction, sur  $A^\perp = \{\ell \in E^\vee \mid \ell(A) = 0\}$ . Enfin, si  $F$  est un second espace adélique rigide, le produit tensoriel  $E \otimes F$  hérite lui aussi d'une structure adélique rigide. Nous utilisons les propriétés élémentaires suivantes de ces constructions.

LEMME 2.1. — *Soient  $E$  et  $F$  des espaces adéliques rigides sur  $K$  et soient  $A$  et  $B$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .*

- (1)  $H(E \otimes F) = H(E)^{\dim F} H(F)^{\dim E}$ .
- (2)  $H(A^\perp) = H(A)/H(E)$ .
- (3)  $H(A + B)H(A \cap B) \leq H(A)H(B)$ .

*Démonstration.* — Voir les propositions 5 et 6 de [2]. □

La formule (1) s'écrit aussi  $H_r(E \otimes F) = H_r(E)H_r(F)$ . Ainsi le sous-espace de  $E \otimes F$  obtenu par produit tensoriel des sous-espaces déstabilisants de  $E$  et de  $F$  a pour hauteur réduite  $H_{\min}(E)H_{\min}(F)$ . En particulier, nous avons immédiatement  $H_{\min}(E \otimes F) \leq H_{\min}(E)H_{\min}(F)$  et la conjecture de Bost affirme qu'il y a égalité.

Nous aurons également besoin du fait suivant qui dit qu'il y a égalité dans (3) pour des sous-espaces particuliers du produit tensoriel.

LEMME 2.2. — *Soient  $E$  et  $F$  des espaces adéliques rigides sur  $K$  et  $A \subset E$ ,  $B \subset F$  des sous-espaces vectoriels. Alors*

$$H(E \otimes B)H(A \otimes F) = H(E \otimes B + A \otimes F)H(A \otimes B).$$

*Démonstration.* — Dans le dual  $(E \otimes F)^\vee \simeq E^\vee \otimes F^\vee$ , nous avons  $(E \otimes B + A \otimes F)^\perp = (E \otimes B)^\perp \cap (A \otimes F)^\perp = (E^\vee \otimes B^\perp) \cap (A^\perp \otimes F^\vee) = A^\perp \otimes B^\perp$ . Les formules (1) et (2) du lemme précédent donnent

$$\begin{aligned} H(E \otimes B + A \otimes F) &= H(E \otimes F)H(A^\perp \otimes B^\perp) \\ &= H(E)^{\dim F} H(F)^{\dim E} (H(A)/H(E))^{\dim B^\perp} (H(B)/H(F))^{\dim A^\perp} \\ &= H(E)^{\dim B} H(F)^{\dim A} H(A)^{\dim B^\perp} H(B)^{\dim A^\perp}. \end{aligned}$$

En utilisant encore la formule (1), il vient

$$\begin{aligned} H(E \otimes B + A \otimes F)H(A \otimes B) &= H(E)^{\dim B} H(B)^{\dim E} H(F)^{\dim A} H(A)^{\dim F} \\ &= H(E \otimes B)H(A \otimes F). \end{aligned} \quad \square$$

### 3. CONCLUSION

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces adéliques rigides. Soient  $E_1, \dots, E_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ . Soient  $F_1, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels de  $F$  et  $F_0 = \{0\}$ .

PROPOSITION 3.1. — *Dans le cadre ci-dessus, nous avons*

$$H\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i \otimes F_i\right) \geq \prod_{i=1}^n H\left(\bigoplus_{j=i}^n E_j\right)^{\dim F_i - \dim F_{i-1}} \prod_{i=1}^n H(F_i)^{\dim E_i}.$$

*Démonstration.* — Nous procédons par récurrence sur  $n$ . Lorsque  $n = 1$ , les deux membres sont égaux par la formule (1). Si  $n \geq 2$ , nous utilisons l'inégalité (3) avec

$$A = \bigoplus_{i=1}^n E_i \otimes F_i \quad \text{et} \quad B = \bigoplus_{i=2}^n E_i \otimes F.$$

Cela donne que le membre de gauche de l'énoncé est supérieur à

$$H\left(\bigoplus_{i=2}^n E_i \otimes F_i\right) H\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i \otimes F_i + \bigoplus_{i=2}^n E_i \otimes F\right) H\left(\bigoplus_{i=2}^n E_i \otimes F\right)^{-1}.$$

En appliquant maintenant le lemme 2.2 avec  $A = E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$  et  $B = F_1$ , cette quantité vaut

$$H\left(\bigoplus_{i=2}^n E_i \otimes F_i\right) H(E \otimes F_1) H\left(\bigoplus_{i=2}^n E_i \otimes F_1\right)^{-1}$$

puis

$$H\left(\bigoplus_{i=2}^n E_i \otimes F_i\right) H(E)^{\dim F_1} H\left(\bigoplus_{i=2}^n E_i\right)^{-\dim F_1} H(F_1)^{\dim E_1}$$

par la formule (1). Il suffit alors de minorer le premier terme grâce à l'hypothèse de récurrence pour obtenir l'inégalité souhaitée.  $\square$

COROLLAIRE 3.2. — *Sous les mêmes hypothèses, nous avons*

$$H_r\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i \otimes F_i\right) \geq H_{\min}(E) H_{\min}(F).$$

*Démonstration.* — Quitte à permuter les indices, on peut supposer  $\dim F_i \geq \dim F_{i-1}$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Il suffit alors de minorer  $H_r(\bigoplus_{j=i}^n E_j) \geq H_{\min}(E)$  et  $H_r(F_i) \geq H_{\min}(F)$  pour  $1 \leq i \leq n$  dans la minoration de la proposition.  $\square$

Plaçons-nous finalement sous les hypothèses du théorème 1.1. Comme  $H_{\min}$  est invariant par extension de corps, nous pouvons supposer  $K = \overline{\mathbb{Q}}$ . Notons alors  $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$  l'unique décomposition en somme de sous-espaces  $G$ -irréductibles. Si  $U \subset E \otimes F$  est le sous-espace déstabilisant, il est stable sous l'action de  $G$  donc il existe des sous-espaces  $F_1, \dots, F_n$  de  $F$  avec

$$U = \bigoplus_{i=1}^n E_i \otimes F_i$$

(proposition 2.2 de [1]). Le corollaire donne donc

$$H_{\min}(E \otimes F) = H_r(U) \geq H_{\min}(E) H_{\min}(F)$$

puis l'égalité puisque nous avons toujours  $H_{\min}(E) H_{\min}(F) \geq H_{\min}(E \otimes F)$ . Le théorème 1.1 est ainsi établi.

## RÉFÉRENCES

- [1] R. Coulangeon et G. Nebe. Slopes of Euclidean lattices, tensor product and group actions. *Israel J. Math.* à paraître. [arXiv:1806.04984v2](https://arxiv.org/abs/1806.04984v2)
- [2] É. Gaudron. Minima and slopes of rigid adelic spaces. 2018. 26 pages.  
<http://math.univ-bpclermont.fr/~gaudron/art18.pdf>
- [3] É. Gaudron et G. Rémond. Corps de Siegel. *J. reine angew. Math.* 726 :187–247, 2017.

Manuscrit reçu le 4 avril 2019,  
révisé le 21 juin 2019,  
accepté le 28 juin 2019.

Gaël RÉMOND  
Université Grenoble-Alpes, Institut Fourier UMR 5582, CS 40700, 38058 Grenoble Cedex 9,  
France  
[Gael.Remond@univ-grenoble-alpes.fr](mailto:Gael.Remond@univ-grenoble-alpes.fr)