CONFLUENTES MATHEMATICI

Anis RAJHI

Cohomologie à support compact d'un espace au-dessus de l'immeuble de Bruhat-Tits de GL_n sur un corps local. Représentations cuspidales de niveau zéro.

Tome 10, nº 1 (2018), p. 95-124.

<http://cml.cedram.org/item?id=CML_2018__10_1_95_0>

Confluentes Math.
10, 1 (2018) 95-124

COHOMOLOGIE À SUPPORT COMPACT D'UN ESPACE AU-DESSUS DE L'IMMEUBLE DE BRUHAT-TITS DE GL_n SUR UN CORPS LOCAL. REPRÉSENTATIONS CUSPIDALES DE NIVEAU ZÉRO.

ANIS RAJHI

Résumé. Soit G le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, où F est un corps localement compact non-archimédien, et $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ son immeuble de Bruhat-Tits. Nous construisons un complexe simplicial $\widetilde{\mathcal{W}}$, doté d'une action de G et d'une projection propre simpliciale G-équivariante $p : \widetilde{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Nous démontrons qu'en dimension supérieure la cohomologie à support compact $\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}, \mathbb{C})$ contient comme sous-quotient toutes les représentations cuspidales irréductibles de niveau zéro.

Abstract. (*Cohomology with compact support of a space over the Bruhat-Tits building of* GL_n *over a local field. Cuspidal representations of level zero.*) Let G the group $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, where F is a non-archimedean locally compact field, and $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ its Bruhat-Tits building. We construct a simplicial complex $\widetilde{\mathcal{W}}$, equipped with an action of G and with a G-equivariant proper simplicial projection $p : \widetilde{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathrm{G})$. We prove that the cohomology with compact support in higher dimensions $\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}, \mathbb{C})$ contains as subquotients all irreducible cuspidal level zero representations.

Introduction

Soient F un corps localement compact, non archimédien, non-discret, G le groupe linéaire général $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ et $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ son immeuble de Bruhat-Tits. Dans ce travail nous construisons un espace équivariant $\widetilde{\mathcal{W}}$, muni d'une projection $p : \widetilde{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Notons T le tore diagonal de G, T^0 sa partie compacte et pour tout simplexe σ de l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, on note U_σ le radical pro-unipotent du sous-groupe parahorique P_σ. L'espace $\widetilde{\mathcal{W}}$ est alors construit comme quotient sous l'action d'un groupe discret du complexe de classes $\mathcal{W}(\mathrm{G})$ du groupe G relativement aux sous-groupes ouverts compacts $\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma$, lorsque σ parcourt l'ensemble des simplexes de l'appartement standard de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. L'espace $\widetilde{\mathcal{W}}$ est muni d'actions simpliciales commutantes de G et du groupe de Weyl sphérique $\mathbb{W}$ de G. L'application p est simpliciale, G-équivariante et chambrée (préserve la dimension des simplexes). Soit G^0 le sous-groupe de G défini par

$$\mathrm{G}^0 = \{g \in \mathrm{G} /\ \det(g) \in \mathcal{O}_\mathrm{F}^*\},$$

où $\mathcal{O}_\mathrm{F}^*$ est le groupe des inversibles de l'anneau $\mathcal{O}_\mathrm{F}$ des entiers de F. Le complexe simplicial $\widetilde{\mathcal{W}}$ n'est pas connexe, mais il admet un sous-complexe connexe et G^0-invariant noté $\mathcal{W}$. De plus les composantes connexes de $\widetilde{\mathcal{W}}$ sont les translatés $g.\mathcal{W}$, pour $g \in \mathrm{G}/\mathrm{G}^0$. Ceci nous permet de nous ramener à l'étude de l'espace $\mathcal{W}$. En effet, le lien entre la cohomologie des espaces $\widetilde{\mathcal{W}}$ et $\mathcal{W}$ est donné par la relation

---

Classification math. : 22E50.
Mots-clés : Representations of the general linear p-adic groups, Bruhat-Tits buildings, Cohomology with compact support.

suivante

$$\mathrm{H}_c^*(\widetilde{\mathcal{W}},\mathbb{C}) \simeq c\text{-ind}_{\mathrm{G}^0}^{\mathrm{G}}\mathrm{H}_c^*(\mathcal{W},\mathbb{C}).$$

L'espace $\mathcal{W}$ se projette sur l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ via l'application $p : \mathcal{W} \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathrm{G})$. La projection p est G^0-équivariante et propre de sorte qu'en munissant l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ d'un recouvrement G^0-équivariant par des sous-complexes compacts, on obtient via l'application p un recouvrement de même type de l'espace $\mathcal{W}$. Un recouvrement assez simple de l'immeuble (ou plutôt de sa subdivision barycentrique) est constitué des résidus des sommets. En remontant via l'application p ce dernier recouvrement à $\mathcal{W}$, on obtient un recouvrement, $(\mathcal{W}_s)_{s\in\mathfrak{B}(\mathrm{G})}$, G^0-équivariante propre localement fini et compact dont le nerf s'identifie de façon G^0-équivariante à l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Afin de décrypter la cohomologie à support compact de l'espace $\mathcal{W}$, nous avons eu besoin d'utiliser les suites spectrales des recouvrements dans le cas simplicial. On s'appuit sur le résultat classique ci-dessous dont la démonstration n'est qu'une simple adaptation du cas de la cohomologie singulière des CW-complexes, voir [2] page 166.

Théorème A. — *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe localement profini,* X *un* $\mathbf{G}$*-complexe simplicial propre muni d'un recouvrement* $\mathbf{G}$*-équivariant* $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *localement fini et propre. Alors il existe une suite spectrale* E^r *dans la catégorie des* $\mathbf{G}$*-modules lisses dont le deuxième terme est donné par* $\mathrm{E}^2_{p,q} = \mathrm{H}^p_c(\mathrm{K},\mathcal{H}^q)$ *tel que*

$$\mathrm{E}^2_{p,q} \underset{p}{\Rightarrow} \mathrm{H}_c^{p+q}(\mathrm{X},\mathbb{C})$$

où K *est le nerf du recouvrement* $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *et pour tout entier naturel* q*,* $\mathcal{H}^q$ *est le système de coefficients* $\mathbf{G}$*-équivariant sur* K *défini par* $\mathcal{H}^q = (\mathcal{H}^q_\sigma, v^\sigma_\tau)_{\sigma\subset\tau}$ *où :*

(a) *Pour tout simplexe* σ *de* K*,* $\mathcal{H}^q_\sigma = \mathrm{H}^q_c(\mathrm{X}_\sigma,\mathbb{C})$*, où* $\mathrm{X}_\sigma = \bigcap_{i\in\sigma}\mathrm{X}_i$.

(b) *Pour tous simplexes* σ *et* τ *de* K*, tel que* $\sigma\subset\tau$*,*

$$v^\sigma_\tau : \mathrm{H}^q_c(\mathrm{X}_\sigma,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^q_c(\mathrm{X}_\tau,\mathbb{C})$$

est le morphisme induit en cohomologie par l'inclusion de X_τ *dans* X_σ.

Le recouvrement $(\mathcal{W}_s)_{s\in\mathfrak{B}(\mathrm{G})}$ qu'on a construit pour l'espace $\mathcal{W}$ vérifie toutes les hypothèses du théorème ci-dessus. Comme conséquence, on obtient l'existence d'une suite spectrale E^r dans la catégorie des G^0-modules lisses dont le deuxième terme est donné par $\mathrm{E}^2_{p,q} = \mathrm{H}^p_c(\mathcal{B}(\mathrm{G}),\mathcal{H}^q)$, où $\mathcal{H}^q$ est le système de coefficients G^0-équivariant sur l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ correspondant, tel que E^r converge vers la cohomologie de $\mathcal{W}$. La suite spectrale ainsi obtenue est très particulière, elle est du premier cadrant et à partir de son deuxième terme tous les termes $\mathrm{E}^r_{p,q}$ tels que $p+q \geqslant n$ sont nuls. Une telle suite spectrale est dite n-triangulaire et nous montrons que sous cette hypothèse elle converge vers sa n-ième page. On obtient alors l'isomorphisme de G^0-modules lisses suivant :

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{H}^m_c(\mathcal{W},\mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{p+q=m} \mathrm{E}^n_{p,q}$$

où $\mathrm{Gr}(\mathrm{H}^m_c(\mathcal{W},\mathbb{C}))$ est le gradué de $\mathrm{H}^m_c(\mathcal{W},\mathbb{C})$ relativement à une certaine filtration décroissante. La compréhension des G^0-modules lisses $\mathrm{E}^n_{p,q}$ nous paraît pour le moment compliquée. Néanmoins, nous avons donné une description des termes $\mathrm{E}^n_{p,q}$ intervenant dans la cohomologie en dimension supérieure. Nous croyons que ça serait inintéressant d'étudier les termes $\mathrm{E}^n_{p,q}$ pour $p+q<n$ car d'après des calculs

faits pour $n = 3$, on s'attendait à ce que les représentations lisses de G les plus intéressantes apparaissent dans la cohomologie de $\widetilde{\mathcal{W}}$ en dimension supérieure. Plus précisément, nous avons obtenu le résultat suivant :

Proposition. — *Dans l'isomorphisme*

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}, \mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{E}_{p,q}^n$$

on a les identifications suivantes :

(a) *Le* G^0*-module lisse* $\mathrm{E}_{0,n-1}^n$ *s'identifie à la somme directe*

$$\bigoplus_{s \in \mathrm{C}} c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_s}^{\mathrm{G}^0} \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C})$$

où C *est une chambre de* $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$.

(b) *Le* G^0*-module lisse* $\mathrm{E}_{1,n-2}^n$ *s'identifie à* $\mathrm{H}_c^1(\mathfrak{B}(\mathrm{G}), \mathcal{H}^{n-2})$.

(c) *Pour* $0 \leqslant p, q \leqslant n-1$, *avec* $p + q = n - 1$ *et* $0 \leqslant q \leqslant n-3$, *le* G^0*-module lisse* $\mathrm{E}_{p,q}^n$ *s'identifie à un quotient de* $\mathrm{H}_c^p(\mathfrak{B}(\mathrm{G}), \mathcal{H}^q)$.

Dans l'isomorphisme ci-dessus, les représentations qui nous ont intéressé sont précisément les induites compactes $c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_s}^{\mathrm{G}^0} \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C})$. En effet, pour tout sommet s de l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, le radical pro-unipotent U_s agit trivialement sur le complexe $\mathcal{W}_s$. Par passage donc au quotient et en identifiant $\mathrm{P}_s/\mathrm{U}_s$ au groupe $\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{GL}_n(k_{\mathrm{F}})$, où k_{F} est le corps résiduel de F, déterminer la structure de P_s-module lisse de $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C})$ revient à déterminer sa structure de $\overline{\mathrm{G}}$-module. De plus, nous avons compris la géométrie des espaces $\mathcal{W}_s$. En effet, nous avons montré que pour tout sommet s de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, le complexe $\mathcal{W}_s$ s'identifie de façon P_s-équivariante au complexe de classes $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ de $\overline{\mathrm{G}}$ relativement aux sous-groupes $\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_\sigma$, lorsque σ parcourt l'ensemble des simplexes d'un cône de l'appartement standard de l'immeuble de Tits de $\overline{\mathrm{G}}$, où $\overline{\mathrm{T}}$ désigne le tore diagonal de $\overline{\mathrm{G}}$ et $\overline{\mathrm{U}}_\sigma$ le radical unipotent du sous-groupe parabolique $\overline{\mathrm{P}}_\sigma$ correspondant au simplexe σ. En particulier, les complexes $\mathcal{W}_s$ sont compacts et connexes, voir proposition (4.1.2) et corollaire (4.1.3). Par contre, la topologie du complexe $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ nous paraît pour le moment mystérieuse et il faudrait mieux la comprendre, ce que nous espérons faire dans un prochain travail. En utilisant une technique due à Broussous dans [3] qui consiste à identifier la contragrédiente du $\overline{\mathrm{G}}$-module $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ à l'espace des formes harmoniques sur $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$, c'est-à-dire l'espace des fonctions complexes sur l'ensemble des chambres de $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ vérifiant une certaine condition de harmonicité. Nous sommes parvenus à identifier un morceau de la cohomologie de $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ en dimension supérieure. Plus précisément, nous avons obtenu le résultat suivant, où l'on note pour tout $\overline{\mathrm{G}}$-module V, $\mathrm{V}^{\mathrm{cusp}}$ sa partie cuspidale :

Théorème B. — $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}} \simeq (\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}})^{\mathrm{cusp}}$.

La restriction des représentations cuspidales irréductibles de caractère central trivial de $\overline{\mathrm{G}}$ au sous-groupe mirabolique $\overline{\mathrm{M}}$ (auquel on adjoint le centre $\overline{\mathrm{Z}}$) est connue, elle est donnée par le modèle de Kirilov. Par la formule de Mackey, nous obtenons donc immédiatement la restriction d'une telle cuspidale au groupe $\overline{\mathrm{T}}$. Comme conséquence, nous montrons le résultat suivant :

Théorème C. — *Toute représentation cuspidale irréductible de caractère central trivial de* $\overline{\mathrm{G}}$ *se plonge dans* $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$.

Nous avons calculé la multiplicité d'une représentation cuspidale irréductible de caractère central trivial de $\overline{\mathrm{G}}$ dans $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$. Plus précisément, toutes les cuspidales irréductibles de caractère central trivial apparaissent avec la même multiplicité et si π on est une, la dimension de l'espace des entrelacements de π dans $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$ est donnée par

$$\frac{1}{(q-1)^{n-1}}(q^{n-1}-1)(q^{n-1}-q)\cdots(q^{n-1}-q^{n-2}),$$

où q est le cardinal du corps résiduel k_{F}, voir proposition (5.1.2). Notons qu'en particulier, pour $n=2$, les cuspidales irréductibles de caractère central trivial apparaissent dans $\mathrm{H}^{1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$ avec une multiplicité 1.

En s'appuyant sur tous les résultats obtenus précédemment et en utilisant la construction des représentation cuspidales de niveau zéro de G donnée dans [7], nous obtenons le résulat central de notre article :

Théorème D. — *Toute représentation cuspidale irréductible de niveau zéro de* G*, de caractère central trivial sur* ${\mathcal{O}_{\mathrm{F}}}^{\times}$*, est isomorphe à un sous-quotient irréductible de l'espace de cohomologie*

$$\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}},\mathbb{C}).$$

1. Notations

Nous fixons pour tout l'article un corps localement compact, non discret et non archimédien F. Pour un tel corps, on note

- $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$ son anneau d'entiers,
- $\mathcal{P}_{\mathrm{F}}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$,
- k_{F} le corps résiduel de F,
- q le cardinal de k_{F}.
- ϖ_{F} une uniformisante fixée de F,
- $\mathcal{V}_{\mathrm{F}}$ la valuation normalisée de F.

1.1. On fixe un entier $n \geqslant 1$. On note G le groupe linéaire général $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ et $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ son immeuble de Bruhat-Tits. On rappelle que l'immeuble de Bruhat-Tits de G est le complexe simplicial G-équivariant dont les sommets sont les classes d'homothéties de réseaux dans F^n et dont les simplexes sont les ensembles finis $(s_0,...,s_p)$ de sommets tels que les $(s_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ possèdent des représentants $(\Lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ tels que

$$\varpi_{\mathrm{F}}\Lambda_0 \subsetneq \Lambda_p \subsetneq ... \subsetneq \Lambda_1 \subsetneq \Lambda_0.$$

Soit S un tore maximal déployé dans G. L'appartement associé à S, qu'on note $\mathcal{A}_{\mathrm{S}}$ est le sous-complexe simplicial de l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ dont les sommets sont les points fixes de $\mathrm{S}(\mathrm{F})^1=\bigcap_{\chi\in\mathrm{X}^*(\mathrm{S})}\ker(\chi)$. Si S est le tore diagonal de G, on note $\mathcal{A}$ l'appartement associé et on l'appelle l'appartement standard. L'ensemble des tores maximaux déployés dans G est en bijection avec l'ensemble des n-uplets de droites $(D_1,...,D_n)$ dans F^n, qu'on appelle les croix, tels que $\mathrm{F}^n=D_1\oplus D_2\oplus...\oplus D_n$. A une croix $(D_1,...,D_n)$ est associé le tore S agissant diagonalement relativement à la décomposition en sommes de droites de F^n. L'ensemble des appartements est donc en bijection avec l'ensemble des croix de F^n. Si $(D_1, ..., D_n)$ est une croix de F^n et $(v_1, ..., v_n)$ une base adaptée, l'appartement corresspondant est le sous-complexe dont les sommets sont

$$\{[\varpi_{\mathrm{F}}^{a_1} v_1 + ... + \varpi_{\mathrm{F}}^{a_n} v_n]/ \ (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n\}$$

où pour tout réseau Λ, $[\Lambda]$ désigne sa classe d'homothétie. Pour tout simplexe σ de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, on note P_σ le sous-groupe parahorique correspondant à σ et U_σ son radical pro-unipotent. Soit G^0 le sous-groupe ouvert de G donné par

$$\mathrm{G}^0 = \{g \in \mathrm{G}/ \ \det(g) \in \mathcal{O}_{\mathrm{F}}^*\}$$

On rappelle que si σ est un simplexe de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, P_σ est le stabilisateur point par point de σ dans G^0.

1.2. Pour $n \geqslant 1$, soit $\overline{\mathrm{G}}$ le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(k_{\mathrm{F}})$ et $\mathfrak{T}(\overline{\mathrm{G}})$ son immeuble de Tits. On rappelle que $\mathfrak{T}(\overline{\mathrm{G}})$ est le complexe simplicial dont l'ensemble ordonné des simplexes est l'ensemble ordonné par inclusion inversée des sous-groupes paraboliques propres de $\overline{\mathrm{G}}$. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [14] §(5.2). Soit $\overline{\mathrm{S}}$ un tore maximal déployé dans $\overline{\mathrm{G}}$. L'appartement associé à $\overline{\mathrm{S}}$, qu'on note $\overline{\mathcal{A}}_{\overline{\mathrm{S}}}$ est le sous-complexe simplicial de l'immeuble $\mathfrak{T}(\overline{\mathrm{G}})$ dont les sommets sont les sous-groupes paraboliques qui contiennent $\overline{\mathrm{S}}$. On note $\overline{\mathrm{T}}$ le tore diagonal de $\overline{\mathrm{G}}$ et $\overline{\mathcal{A}}$ l'appartement associé et on l'appelle l'appartement standard de $\mathfrak{T}(\overline{\mathrm{G}})$.

1.3. Pour tout complexe simplicial (ou tout simplement complexe) X, on note Σ_{X} l'ensemble ordonné par inclusion des simplexes de X et pour tout entier p, X_p l'ensemble des p-simplexes de X. Dans la suite de tout l'article on ne considére que des complexes simpliciaux localement finis et de dimension finie. Si X est un complexe, sa réalisation géométrique $|\mathrm{X}|$ (ou polytope correspondant) est l'espace topologique obtenu en identifiant chaque p-simplexe de X avec le p-simplexe standard de $\mathbb{R}^{p+1}$ (ie. l'enveloppe convexe des vecteurs de la base canonique) et en recollant les simplexes suivant leurs faces. Pour plus de précisions on renvoie à [12] page 108.

Si $(\mathrm{X}, \leqslant)$ est un ensemble partiellement ordonné (en abrégé. epo), le complexe des drapeaux de X, qu'on note Flag(X), est le complexe simplicial d'ensemble de sommets X et dont les simplexes sont les chaînes de X, c'est-à-dire les sous-ensembles finis totalement ordonné.

1.4. Soit $\mathbf{G}$ un groupe topologique localement profini. Par *représentation lisse* de $\mathbf{G}$ on entend un couple (π, V) formé d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et d'un homomorphisme de groupes π de $\mathbf{G}$ dans $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$ tel que le stabilisateur dans $\mathbf{G}$ de tout vecteur de V soit ouvert. *Dans cet article, toutes les représentations sont supposées lisses.*

Si (π, V) est une représentation lisse de $\mathbf{G}$, sa contragrédiente $\pi^\vee$ est la représentation naturelle de $\mathbf{G}$ dans le sous-espace $\mathrm{V}^\vee$ du dual V^* de V formé des formes linéaires sur V dont le stabilisateur dans $\mathbf{G}$ est ouvert.

Soient $\mathbf{H}$ un sous-groupe fermé de $\mathbf{G}$ et (σ, V) une représentation lisse de $\mathbf{H}$. On note $c\text{-ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\sigma)$ l'induite compacte de σ à $\mathbf{G}$, constituée des fonctions f de $\mathbf{G}$ dans V localement constante à support compact modulo $\mathbf{G}$ telles que $f(hg) = \sigma(h)f(g)$ pour $h \in \mathbf{H}$, $g \in \mathbf{G}$.

2. Construction de l'espace $\widetilde{\mathcal{W}}$

2.1. **Complexes de classes.** Dans tout ce paragraphe, on fixe un groupe localement profini $\mathbf{G}$. Si $(\mathrm{I}, \leqslant)$ est un ensemble partiellement ordoné, une famille ordonnée propre de sous-groupes de $\mathbf{G}$ est une famille $(\mathbf{G}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de sous-groupes ouverts compacts indexés par I telle que pour tout $i, j \in \mathrm{I}$, $i \leqslant j$ implique que $\mathbf{G}_i$ est inclus dans $\mathbf{G}_j$. Soit $\mathcal{F} = (\mathbf{G}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une telle famille. On considère l'ensemble ordonné par inclusion des classes à gauche $g\mathbf{G}_i$, lorsque g parcourt $\mathbf{G}$ et i parcourt I :

$$g\mathbf{G}_i \leqslant h\mathbf{G}_j \Longleftrightarrow g\mathbf{G}_i \subset h\mathbf{G}_j$$

Définition 2.1. — Le complexe de classes de $\mathbf{G}$ relativement à la famille $\mathcal{F}$ est le complexe simplicial défini par,

$$\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathbf{G}_i, i \in \mathrm{I}) = \mathrm{Flag}\{g\mathbf{G}_i,\ g \in \mathbf{G},\ i \in \mathrm{I}\}$$

Le complexe de classe ainsi défini sera noté parfois par $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$. Les sommets de $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ sont les classes à gauche $g\mathbf{G}_i$, lorsque g parcourt $\mathbf{G}$ et i parcourt l'ensemble I, et les simplexes sont de la forme $\sigma = \{g_0\mathbf{G}_{i_0} < g_1\mathbf{G}_{i_1} < \dots < g_p\mathbf{G}_{i_p}\}$. Remarquons qu'un simplexe comme ci-dessus se met sous la forme $\{g\mathbf{G}_{i_0} < g\mathbf{G}_{i_1} < \dots < g\mathbf{G}_{i_p}\}$, où g est dans $\mathbf{G}$ et $\{i_0 < i_1 < \dots < i_p\}$ un simplexe de Flag(I). Notons que si le complexe Flag(I) est dimension finie, le complexe de classes $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ l'est aussi et admet même dimension que Flag(I). En effet, un simplexe de dimension maximale de $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ est un simplexe $\sigma = \{g\mathbf{G}_{i_0} < g\mathbf{G}_{i_1} < \dots < g\mathbf{G}_{i_p}\}$, avec $g \in \mathbf{G}$ et $\{i_0 < i_1 < \dots < i_p\}$ un simplexe de dimension maximale de Flag(I).

Proposition 2.2. — *Si le complexe simplicial* Flag(I) *est localement fini, alors le complexe simplicial $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ est localement fini. En particulier, sa réalisation géométrique est localement compacte.*

Démonstration. — Supposons que le complexe Flag(I) est localement fini. Pour tout sommet i de Flag(I), l'ensemble A_i des simplexes de Flag(I) qui contiennent i est donc fini. Un simplexe de $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ qui contient le sommet $s = \mathbf{G}_i$ est de la forme $\sigma = \{g\mathbf{G}_{i_0} < \dots < g\mathbf{G}_{i_p}\}$ avec $i \in \{i_0 < \dots < i_p\}$ et $g \in \mathbf{G}_i$. Pour tout simplexe $\alpha = \{i_0 < \dots < i_p\}$ contenant i de Flag(I) et pour tout $g \in \mathbf{G}_i$, on note $\sigma_{\alpha,g}$ le simplexe de $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ donné par $\sigma_{\alpha,g} = \{g\mathbf{G}_{i_0} < \dots < g\mathbf{G}_{i_p}\}$. L'ensemble A_s des simplexes de $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ qui contiennent s est constitué des simplexes $\sigma_{\alpha,g}$, pour $\alpha \in \mathrm{A}_i$ et $g \in \mathbf{G}_i$. Pour tout simplexe $\alpha = \{i_0 < \dots < i_p\} \in \mathrm{A}_i$, on note $\mathrm{A}_{s,\alpha}$ l'ensemble des simplexes de $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ de la forme $\sigma_{\alpha,g}$, pour $g \in \mathbf{G}_i$. Il est clair que $\mathrm{A}_s = \sqcup_{\alpha\in\mathrm{A}_i} \mathrm{A}_{s,\alpha}$, de plus la réunion est disjointe et finie puisque A_i est fini. On remarque que $\sigma_{\alpha,g} = \sigma_{\alpha,h}$ si et seulement si $h^{-1}g \in \mathbf{G}_{i_0}$, ainsi $\mathrm{A}_{\alpha,g}$ est en bijection avec l'ensemble quotient $\mathbf{G}_i/\mathbf{G}_{i_0}$ qui est fini, puisque c'est le quotient d'un groupe compact par un sous-groupe ouvert. On en déduit que les ensembles de simplexes $\mathrm{A}_{\alpha,g}$ sont finis. □

Le groupe $\mathbf{G}$ agit par automorphismes simpliciaux sur son complexe de classes $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$, l'action sur les sommets est donnée par $g.x\mathbf{G}_i = gx\mathbf{G}_i$. Le stabilisateur d'un sommet $s = x\mathbf{G}_i$ est le sous-groupe ouvert compact $x\mathbf{G}_i x^{-1}$. Ainsi, le $\mathbf{G}$-complexe simplicial $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ est propre.

Définition 2.3. — ([6], page 116) Soit $\mathbf{G}$ un groupe et X un $\mathbf{G}$-complexe simplicial. On dit que X est $\mathbf{G}$-régulier (ou tout simplement régulier) si pour tout sous-groupe $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$, pour tous éléments $g_0, \dots, g_p$ de $\mathbf{H}$, et pour tout sommets

$s_0, ..., s_p$ de X, si $s_0, ..., s_p$ et $g_0 s_0, ..., g_p s_p$ engendrent deux simplexes de X, alors il existe $g \in \mathbf{H}$ tel que $gs_i = g_i s_i$, pour tout $i \in \{0, ..., p\}$.

Proposition 2.4. — *Le* $\mathbf{G}$*-complexe simplicial* $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ *est régulier.*

Démonstration. — Soit $\mathbf{H}$ un sous-groupe de $\mathbf{G}$, $g_0, ..., g_p$ des éléments de $\mathbf{H}$ et $s_0, ..., s_p$ des sommets de $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$, avec $s_i = x_i \mathbf{G}_{k_i}$. Supposons que $s_0, ..., s_p$ et $g_0 s_0, ..., g_p s_p$ engendrent deux simplexes. Quitte à réindexer les sommets s_i, on peut supposer que $s_i = x_i \mathbf{G}_{k_i}$ avec $x_0 \mathbf{G}_{k_0} < ... < x_p \mathbf{G}_{k_p}$. Si on note $\sigma = \{s_0, ..., s_p\}$ et $\tau = \{g_0 s_0, ..., g_p s_p\}$ alors

$$\sigma = \{x_0 \mathbf{G}_{k_0} < ... < g_0 \mathbf{G}_{k_p}\} \text{ et } \tau = \{g_0 x_0 \mathbf{G}_{k_0} < ... < g_0 x_0 \mathbf{G}_{k_p}\}.$$

Par suite on a $s_i = g_0 x_0^{-1} g_0^{-1} x_i . s_i$ pour tout i. D'où $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ est régulier. □

Définition 2.5. — On appelle appartement standard de $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$, qu'on note $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ s'il n'y a pas de confusion à craindre, le sous-complexe de $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ formé par les simplexes de la forme $\sigma = \{\mathbf{G}_{i_0} < .... < \mathbf{G}_{i_p}\}$. On appelle appartement de $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ tout translaté $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$, pour $g \in \mathbf{G}$.

Notons que si le complexe Flag(I) est connexe, alors chaque appartement de $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ l'est aussi. En effet Flag(I) se projette de façon simpliciale sur tout appartement de $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ via l'application $p : \mathrm{Flag(I)} \longrightarrow g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ définie sur les sommets par $p(i) = g\mathbf{G}_i$ pour tout sommet i de I. Notons $\mathbf{G}^0$ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ engendré par les sous-groupes $\mathbf{G}_i$, pour $i \in \mathrm{I}$.

Proposition 2.6. — *Supposons que le complexe* Flag(I) *est connexe. Alors le complexe* $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ *est connexe si et seulement si le groupe* $\mathbf{G}$ *est engendré par les sous-groupes* $\mathbf{G}_i$*, pour* $i \in \mathrm{I}$.

Démonstration. — Supposons que $\mathbf{G}$ est engendré par les sous-groupes $\mathbf{G}_i$ pour $i \in \mathrm{I}$. Notons ℓ la fonction longueur de $\mathbf{G}$ par rapport à la partie génératrice $\cup_{i\in\mathrm{I}} \mathbf{G}_i$. C'est la fonction de $\mathbf{G}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $\ell(g) = \min\{r \in \mathbb{N},\ g = g_1 g_2 ... g_r\ ,\ g_k \in \cup_{i\in\mathrm{I}} \mathbf{G}_i\}$ pour tout $g \in \mathbf{G}$. Montrons par récurrence sur $r \in \mathbb{N}$ que deux sommets $s = \mathbf{G}_i$ et $t = h\mathbf{G}_j$, tels que $\ell(h) = r$, sont reliés par un chemin dans $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$. Rappelons qu'un chemin de $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ est une suite $(s_0, ..., s_k)$ de sommets telle que deux sommets consécutifs forment une arête. Pour $r = 0$, la propriété est vraie puisque dans ce cas $h = 1$ et donc s et t sont deux sommets de l'appartement standard $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ qui est connexe puisque par hypothèse Flag(I) l'est aussi. Soit $r \geqslant 1$. Supposons la propriété vraie à l'ordre r. Soit $s = \mathbf{G}_i$ et $t = h\mathbf{G}_j$ deux sommets de $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$, tel que $\ell(h) = r + 1$. Soit $h = h_{i_1} .... h_{i_{r+1}}$ une écriture réduite de h, où chaque élément $h_{i_k} \in \mathbf{G}_{i_k}$ pour tout $k = 1, ..., r + 1$. Posons $x = h_{i_2} .... h_{i_{r+1}}$ et $y = h_{i_1}$. Par hypothèse de récurrence, $\mathbf{G}_{i_1}$ et $x\mathbf{G}_j$ sont reliés par un chemin dans $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$. En translatant par l'élément y, les sommets $y\mathbf{G}_{i_1} = \mathbf{G}_{i_1}$ et $yx\mathbf{G}_j = h\mathbf{G}_j$ sont reliés par un chemin. Or les deux sommets $\mathbf{G}_i$ et $\mathbf{G}_{i_1}$ sont reliés par un chemin dans $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ puisque ce sont deux sommets de l'appartement standard $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. Par suite, les deux sommets s et t sont reliés par un chemin dans $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$. D'où $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ est connexe. Réciproquement, supposons que $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ est connexe et montrons que $\mathbf{G}$ est engendré par les sous-groupes $\mathbf{G}_i$, pour $i \in \mathrm{I}$. Par hypothèse, pour tout h dans $\mathbf{G}$ et pour tout i dans I, les sommets $s = \mathbf{G}_i$ et $t = h\mathbf{G}_i$ sont reliés par un chemin $c = (c_0, ..., c_m)$ dans $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$. Montrons par récurrence sur m que $h \in \mathbf{G}^0$. Pour $m = 0$, c'est clairement vrai. Supposons que le résultat est vrai à l'ordre m. Soit $c = (c_0, ..., c_{m+1})$ un chemin de $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ d'origine s et d'extrémité t, où $c_j = h_{i_j}\mathbf{G}_{i_j}$ pour tout $j = 0, ..., m+1$. Par hypothèse de récurrence, l'élément h_{i_m} appartient à $\mathbf{G}^0$, or $c_m = h_{i_m}\mathbf{G}_{i_m}$ est relié par une arête à $t = h\mathbf{G}_i$. On distingue deux cas : soit $h_{i_m}\mathbf{G}_{i_m}$ est inclus dans $h\mathbf{G}_i$ et donc $h \in \mathbf{G}^0$ puisque $h_{i_m} \in \mathbf{G}^0$ et $\mathbf{G}_{i_m}, \mathbf{G}_i$ sont inclus dans $\mathbf{G}^0$, soit $h\mathbf{G}_i$ est inclus dans $h_{i_m}\mathbf{G}_{i_m}$ et donc de même $h \in \mathbf{G}^0$. On en déduit que $\mathbf{G}$ est inclus dans $\mathbf{G}^0$ et donc $\mathbf{G}$ est engendré par les sous-groupes $\mathbf{G}_i$. □

Corollaire 2.7. — *Supposons que le complexe* Flag(I) *est connexe. Alors l'ensemble des composantes connexes de* $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ *s'identifie de façon* $\mathbf{G}$*-équivariante à* $\mathbf{G}/\mathbf{G}^0$*, c'est-à-dire*

$$\pi_0(\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})) \simeq \mathbf{G}/\mathbf{G}^0$$

Démonstration. — Notons $\mathcal{W}$ le complexe $\mathcal{W}(\mathbf{G}, \mathcal{F})$ et $\mathcal{W}^0$ son sous-complexe $\mathcal{W}(\mathbf{G}^0, \mathcal{F})$. D'après la proposition précédente, le complexe $\mathcal{W}^0$ est connexe. Soit $\mathcal{S}$ un système de représentants dans $\mathbf{G}$ de $\mathbf{G}/\mathbf{G}^0$. Pour tout $g \in \mathcal{S}$, le translaté $g.\mathcal{W}^0$ est un sous-complexe connexe de $\mathcal{W}$ et on a clairement

$$\mathcal{W} = \bigcup_{g \in \mathcal{S}} g.\mathcal{W}^0.$$

Cette dernière réunion est disjointe. En effet, si pour deux éléments g_1 et g_2 de $\mathcal{S}$, les complexes $g_1.\mathcal{W}^0$ et $g_2.\mathcal{W}^0$ s'intersectent, alors quitte à choisir un sommet s dans $g_1.\mathcal{W}^0 \cap g_2.\mathcal{W}^0$ on a : $s = g_1 x\mathbf{G}_i = g_2 y\mathbf{G}_i$, avec x et y dans $\mathbf{G}^0$. Ceci implique que $g_1\mathbf{G}^0 = g_2\mathbf{G}^0$ et donc $g_1 = g_2$. Par conséquent, les sous-complexes connexes $g.\mathcal{W}^0$, pour $g \in \mathcal{S}$, sont deux à deux disjoints. Ce sont donc les composantes connexes de $\mathcal{W}$. □

2.2. **Construction de l'espace $\widetilde{\mathcal{W}}$.** Dans la suite de tout l'article, on fixe les notations suivantes :

- T^0 le groupe des matrices diagonales à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}^{\times}$.
- $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ le normalisateur dans G du tore T et $\mathrm{N}^0 = \mathrm{N} \cap \mathrm{G}^0$.
- $\mathrm{T}^1 = \mathrm{T} \cap \mathrm{G}^0$ et $\mathbb{T}$ le groupe quotient $\mathrm{T}^1/\mathrm{T}^0$ qui s'identifie à $\mathbb{Z}^{n-1}$.
- $\mathbb{W} = N/T$ le groupe de Weyl sphérique de G.
- $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{A}})$ le cône de base l'appartement $\overline{\mathcal{A}}$ qu'on identifie au complexe simplicial dont l'ensemble ordonné des simplexes est l'ensemble des sous-groupes paraboliques (propres ou non) de $\overline{\mathrm{G}}$ contenant le tore $\overline{\mathrm{T}}$.

Définition 2.8. —

(i) Le complexe $\mathcal{W}(\mathrm{G})$ est le complexe de classes de G relativement à la famille ordonnée propre de sous-groupes $\mathcal{U} = (\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma)_{\sigma \in \sum_{\mathcal{A}}}$,

$$\mathcal{W}(\mathrm{G}) = \mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma, \sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}})$$

(ii) Le complexe $\mathcal{W}(\mathrm{G}^0)$ est le complexe de classes de G^0 relativement à la famille ordonnée propre de sous-groupes $\mathcal{U}^0 = (\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma)_{\sigma \in \sum_{\mathcal{A}}}$,

$$\mathcal{W}(\mathrm{G}^0) = \mathcal{W}(\mathrm{G}^0, \mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma, \sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}})$$

(iii) Le complexe $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ est le complexe de classes de $\overline{\mathrm{G}}$ relativement à la famille ordonnée de sous-groupes $(\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_{\mathcal{C}(\overline{\mathcal{A}})}}$,

$$\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}) = \mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}, \overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_\sigma, \sigma \in \Sigma_{\mathcal{C}(\overline{\mathcal{A}})})$$

Le complexe $\mathcal{W}(\mathrm{G}^0)$ est un sous-complexe de $\mathcal{W}(\mathrm{G})$. Ces deux complexes sont de dimension $n-1$ et d'après la proposition (2.1.2), ils sont localement finis et donc leurs réalisations géométriques sont localement compactes.

PROPOSITION 2.9. — *Le complexe simplicial $\mathcal{W}(\mathrm{G}^0)$ est connexe. En particulier, sa réalisation géométrique est connexe.*

Démonstration. — D'après la proposition (2.1.7), il suffit de montrer que le groupe G^0 est engendré par les sous-groupes $\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma$, lorsque σ décrit l'ensemble des simplexes de l'appartement $\mathcal{A}$. Si on note $\widetilde{\mathrm{G}}$ le sous-groupe de G engendré par les sous-groupes $\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma$, pour σ dans $\Sigma_{\mathcal{A}}$, il est clair que $\widetilde{\mathrm{G}}$ est contenu dans G^0 puisque les sous-groupes $\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma$ sont tous contenus dans G^0. D'après la décomposition de Cartan de G, on a $\mathrm{G} = \mathrm{KAK}$, où K est le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_\mathrm{F})$ et A est l'ensemble des matrices diagonales de la forme $\mathrm{diag}(\varpi_\mathrm{F}^{k_1}, ..., \varpi_\mathrm{F}^{k_n})$, où les k_i sont des entiers tel que $k_1 \leqslant k_2 \leqslant ... \leqslant k_n$. Par conséquent, on a la décomposition $\mathrm{G}^0 = \mathrm{KA}^0\mathrm{K}$, où A^0 est le sous-ensemble de A formé par les matrices $\mathrm{diag}(\varpi_\mathrm{F}^{k_1}, ..., \varpi_\mathrm{F}^{k_n})$ tel que $k_1 + ... + k_n = 0$. Donc, pour montrer que G^0 est contenu dans $\widetilde{\mathrm{G}}$ il suffit de montrer que K et A^0 le sont. D'abord K est contenu dans $\widetilde{\mathrm{G}}$ puisqu'on vérifie facilement que que pour tout sommet s de l'appartement $\mathcal{A}$, le sous-groupe parahorique P_s est contenu dans $\widetilde{\mathrm{G}}$ (car il est engendré par les sous-groupes $\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma$ lorsque σ décrit l'ensemble des simplexes de $\mathcal{A}$ qui contiennent s). Pour montrer que A^0 est contenu dans $\widetilde{\mathrm{G}}$ il suffit de vérifier que $\widetilde{\mathrm{G}}$ contient le groupe des matrices diagonales de déterminant 1. Par une simple récurrence sur n, on vérifie que ce dernier groupe est engendré par les matrices diagonales de la formes $\mathrm{diag}(1, ..., 1, \lambda^{-1}, \lambda, 1..., 1)$, avec $\lambda \in \mathrm{F}^\times$. Une telle matrice appartient à $\widetilde{\mathrm{G}}$, car elle est de la forme $txt^{-1}x^{-1}$, où x est la matrice de la transposition $(i, i+1)$, $t = \mathrm{diag}(1, ...1, \lambda, 1, ...1)$, et que txt^{-1} est dans $t\mathrm{K}t^{-1}$. □

COROLLAIRE 2.10. — *Le complexe simplicial $\mathcal{W}(\mathrm{G})$ est non connexe et on a*

$$\pi_0(\mathcal{W}(\mathrm{G})) \simeq \mathbb{Z}$$

Démonstration. — D'après la proposition précédente, le sous-groupe de G engendré par les sous-groupes $\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma$, lorsque σ décrit l'ensemble des simplexes de $\mathcal{A}$, est G^0. Donc d'après le corollaire (2.1.8), l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{W}(\mathrm{G})$ s'identifie à G/G^0 qui s'identifie à $\mathbb{Z}$. □

Le groupe G agit sur le complexe $\mathcal{W}(\mathrm{G})$ par automorphismes simpliciaux, l'action sur les sommets est donnée par, $g.x\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma = gx\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma$. Pour cette action, le sous-complexe $\mathcal{W}(\mathrm{G}^0)$ est G^0-invariant. Le groupe N agit aussi sur le complexe $\mathcal{W}(\mathrm{G})$, l'action sur les sommets est donnée par, $n.x\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma = x\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma n^{-1}$. Cette action est bien définie car comme le groupe N normalise la famille de groupes $(\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma)_{\sigma\in\sum_{\mathcal{A}}}$ alors, $n.x\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma = x\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma n^{-1} = xn^{-1}\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{n.\sigma}$. Dans toute la suite de l'article, on ne s'intéressera qu'à la restriction de l'action de N au groupe T^1 :

$$\mathrm{T}^1 \times \mathcal{W}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathcal{W}(\mathrm{G}),\ (t, x\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma) \longmapsto xt^{-1}\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{t.\sigma}$$

La restriction de cette action à T^0 est triviale. Par conséquent, l'action de T^1 sur $\mathcal{W}(\mathrm{G})$ passe au quotient et induit une action simpliciale du groupe quotient $\mathrm{T}^1/\mathrm{T}^0$, qu'on note $\mathbb{T}$.

DÉFINITION 2.11. —

(i) Le complexe $\widetilde{\mathcal{W}}$ est le complexe simplicial quotient $\mathcal{W}(\mathrm{G})/\mathbb{T}$.
(ii) Le complexe $\mathcal{W}$ est le complexe simplicial quotient $\mathcal{W}(\mathrm{G}^0)/\mathbb{T}$.

Proposition 2.12. —

(i) *Le complexe simplicial $\mathcal{W}$ est connexe. En particulier, sa réalisation géométrique est connexe.*
(ii) *Le complexe simplicial $\widetilde{\mathcal{W}}$ n'est pas connexe et on a $\pi_0(\widetilde{\mathcal{W}}) \simeq \mathbb{Z}$. De plus, les composantes connexes de $\widetilde{\mathcal{W}}$ sont les translatés $g.\mathcal{W}$, lorsque g parcourt l'ensemble* G/G^0.

Démonstration. — Le premier point résulte du fait que $\mathcal{W}$ est l'image par la surjection canonique du complexe $\mathcal{W}(\mathrm{G}^0)$ qui est connexe d'après la proposition (3.2.2). Pour le deuxième point, il est clair que le complexe $\widetilde{\mathcal{W}}$ est recouvert par les sous-complexes $g.\mathcal{W}$, pour g dans G/G^0. Soient g et h deux éléments de G. Supposons que les sous-complexes $g.\mathcal{W}$ et $h.\mathcal{W}$ s'intersectent. Il existe alors un sommet $x\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma$ de $\mathcal{W}(\mathrm{G})$ tel que sa classe modulo $\mathbb{T}$ est dans $g.\mathcal{W}\cap h.\mathcal{W}$, c'est-à-dire tel que $\langle gx\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma\rangle = \langle hx\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma\rangle$. Il existe donc $t \in \mathrm{T}^1$ tel que $gx\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma = hxt^{-1}\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma$, ce qui donne $tx^{-1}h^{-1}gx \in \mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma$. Comme t et x sont dans G^0 et que $\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma$ est contenu dans G^0, alors $h^{-1}g$ est dans G^0. Par suite $g.\mathcal{W} = h.\mathcal{W}$. On en déduit que les $g.\mathcal{W}$, pour g dans G/G^0, forment un recouvrement disjoint par des sous-complexes connexes. Ce sont donc les composantes connexes de $\widetilde{\mathcal{W}}$. □

3. Cohomologie à support compact

3.1. **Cohomologie simpliciale à support compact.** Si X est un complexe simplicial, pour tout entier p, on note X_p l'ensemble des p-simplexes de X. Un p-simplexe ordonné de X est une suite $(s_0, ..., s_p)$ de sommets telle que $\{s_0, ..., s_p\}$ est un p-simplexe de X. On dit que deux simplexes ordonnés sont équivalents si les simplexes correspondants sont les mêmes et si les indexations diffèrent d'une permutation paire. On notera $[s_0, ..., s_p]$ la classe de $(s_0, ..., s_p)$. On note $\mathrm{X}_{(p)}$ l'ensemble des p-simplexes orientés de X. L'espace des p-cochaînes orientées de X est l'espace des fonctions $f : \mathrm{X}_{(p)} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

(a) la fonction f est à support fini.
(b) $f([s_{\sigma(0)}, ..., s_{\sigma(p)}]) = \varepsilon(\sigma)f([s_0, ..., s_p])$ pour toute permutation σ de $\{0, ..., p\}$, où ε désigne la signature d'une permutation.

On notera $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$ l'espace des p-cochaînes orientées de X et on définit un opérateur cobord $d_p : \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p+1)}, \mathbb{C})$ par,

$$d_p(f)([s_0, ..., s_{p+1}]) = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i f([s_0, ..., \widehat{s_i}, ..., s_{p+1}]).$$

On obtient ainsi un complexe de cochaînes $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}, \mathbb{C}) = (\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C}), d)$, et on définit alors $\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C}) = \mathrm{H}^p(\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}, \mathbb{C}))$, et on l'appelle le p-ième espace de cohomologie à support compact de X.

Soit $\mathbf{G}$ est un groupe localement profini et X un $\mathbf{G}$-complexe simplicial propre. Le groupe $\mathbf{G}$ agit de façon linéaire sur les espaces des cochaînes orientées de X par

$$g.f([s_0, ..., s_p]) = f([g^{-1}.s_0, ..., g^{-1}.s_p]).$$

L'action linéaire de $\mathbf{G}$ sur l'espace $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)},\mathbb{C})$ est lisse et définit donc une représentation lisse de $\mathbf{G}$ dans $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)},\mathbb{C})$. Les opérateurs cobords sont des morphismes de $\mathbf{G}$-modules, de sorte que les espaces de cohomologie $\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C})$ sont munis d'une représentation lisse de $\mathbf{G}$.

Théorème 3.1. — *([5], théorème 3) Soit $\mathbf{G}$ le groupe des points rationnels d'un groupe réductif défini sur* F *et $\mathfrak{B}(\mathbf{G})$ son immeuble de Bruhat-Tits. Alors on a des isomorphismes de $\mathbf{G}$-modules lisses,*

$$\mathrm{H}_c^p(\mathfrak{B}(\mathbf{G}),\mathbb{C}) = \begin{cases} 0 & \textit{si } p \neq \mathrm{rg}_{ss}(\mathbf{G}) \\ \mathrm{St}_{\mathbf{G}} & \textit{si } p = \mathrm{rg}_{ss}(\mathbf{G}) \end{cases}$$

où $\mathrm{St}_{\mathbf{G}}$ (resp. $\mathrm{rg}_{ss}(\mathbf{G})$) est la représentation de Steinberg (resp. le rang semi-simple) de $\mathbf{G}$.

3.2. **Formes harmoniques.** Soit $\mathbf{G}$ un groupe localement profini et X un $\mathbf{G}$-complexe simplicial, propre et étiqueté. On fixe un étiquetage $e : \mathrm{X}_0 \longrightarrow \Delta_n$ une fois pour toute, où n est la dimension de X, et on suppose que l'action du groupe $\mathbf{G}$ préserve l'étiquetage.

Définition 3.2. — Une forme harmonique sur X est une fonction $f : \mathrm{X}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant,

$$\sum_{\mathrm{C}\in\mathrm{X}_n} [\mathrm{C} : \sigma] f(\mathrm{C}) = 0$$

pour tout simplexe $\sigma \in \mathrm{X}_{n-1}$. On note $\mathcal{H}(\mathrm{X},\mathbb{C})$ l'espace des formes harmoniques sur X.

Le groupe $\mathbf{G}$ agit de façon linéaire sur l'espace $\mathcal{H}(\mathrm{X},\mathbb{C})$ des formes harmoniques, l'action étant donnée par $g.f(\mathrm{C}) = f(g^{-1}.\mathrm{C})$, pour tout $g \in \mathbf{G}$ et pour tout $\mathrm{C} \in \mathrm{X}_n$. La partie lisse du $\mathbf{G}$-module $\mathcal{H}(\mathrm{X},\mathbb{C})$ sera notée $\mathcal{H}_\infty(\mathrm{X},\mathbb{C})$, et on l'appelle l'espace des formes harmoniques lisses de X sous l'action de $\mathbf{G}$.

Pour tout entier p, l'espace des p-cochaînes de X, qu'on note $\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C})$, est l'espace des fonctions à support fini de X_p à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit un nombre d'incidence $[\sigma : \tau]$ entre un p-simplexe $\tau = \{s_0,...,s_p\}$ et un $(p+1)$-simplexe $\sigma = \{t_0,...,t_{p+1}\}$, tels que $\tau \subset \sigma$, de la façon suivante :

$$[\sigma : \tau] = (-1)^i \text{ si } \{e(t_0),...,e(t_{p+1})\}\backslash\{e(s_0),...,e(s_p)\} = \{i\}.$$

On définit un opérateur cobord $\delta_p : \mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{p+1}(\mathrm{X},\mathbb{C})$ par,

$$\delta_p(f)(\sigma) = \sum_{\tau\in\mathrm{X}_p} [\sigma : \tau] f(\tau).$$

Le groupe G agit de façon linéaire sur les espaces des cochaînes de X, l'action étant donnée par $g.f(\sigma) = f(g^{-1}.\sigma)$, pour tout $g \in \mathrm{G}$, pour tout $f \in \mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C})$ et pour tout $\sigma \in \mathrm{X}_p$. L'action linéaire de G sur l'espace $\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C})$ est lisse et définit donc une représentation lisse de G dans $\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C})$. Comme l'étiquatage e de X permet de fixer une orientation des simplexes, on remarque que le complexe de cochaînes $(\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C}),\delta_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ que l'on a construit est isomorphe (en tant que complexe de $\mathbb{C}$-espaces) au complexe des cochaînes orientées construit dans la section précédente. Mais comme le groupe G agit sur X en préservant l'étiquatage, alors les deux complexes sont isomorphes en tant que G-modules lisses. Par conséquent, les complexes des cochaînes $(\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C}),\delta_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ et $(\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)},\mathbb{C}),d_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ admettent des espaces de cohomologies isomorphes en tant que G-modules lisses. Pour tout entier p, on dispose d'un crochet de dualité :

$$\langle .,. \rangle : \mathrm{C}^p(\mathrm{X},\mathbb{C}) \times \mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C},$$

où $\mathrm{C}^p(\mathrm{X},\mathbb{C})$ est l'espace des cochaînes à support quelconque de X (ie. l'espace de toutes les fonctions de X_p à valeurs dans $\mathbb{C}$). Le crochet est défini par,

$$\langle f, g\rangle = \sum_{x\in \mathrm{X}_p} f(x)g(x).$$

Via ce crochet, on peut identifier le dual algèbrique $\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C})^*$ de $\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C})$ à $\mathrm{C}^p(\mathrm{X},\mathbb{C})$. Un calcul simple donne :

$$\langle f, \delta_p(g)\rangle = \langle \delta_p^*(f), g\rangle,\ \ f \in \mathrm{C}^p(\mathrm{X},\mathbb{C}),\ \ g \in \mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C}), \tag{3.2.1}$$

où $\delta_p^* : \mathrm{C}^{p+1}(\mathrm{X},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}^p(\mathrm{X},\mathbb{C})$ est l'application linéaire définie par,

$$\delta_p^*(f)(\tau) = \sum_{\sigma\in \mathrm{X}_{p+1}} [\sigma:\tau] f(\sigma),\ \ \sigma \in \mathrm{X}_{p+1}.$$

Via l'identification de l'espace $\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C})^*$ à $\mathrm{C}^p(\mathrm{X},\mathbb{C})$, pour tout entier p, l'application linéaire δ_p^* correspond à l'application transposée de l'application cobord δ_p. Comme G-module, l'espace $\mathrm{H}_c^n(\mathrm{X},\mathbb{C})$ est défini comme étant le G-module quotient $\mathrm{C}_c^n(\mathrm{X})/\delta\mathrm{C}_c^{n-1}(\mathrm{X})$, où δ est l'application cobord δ_{n-1}. En désignant par V^* le dual algèbrique d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, alors on a

$$\mathrm{H}_c^n(\mathrm{X},\mathbb{C})^* = \{\omega \in \mathrm{C}_c^n(\mathrm{X})^*;\ \omega_{|\delta\mathrm{C}_c^n(\mathrm{X})} = 0\}.$$

En identifiant $\mathrm{C}_c^n(\mathrm{X})^*$ à $\mathrm{C}^n(\mathrm{X})$ alors, pour $\omega \in \mathrm{C}^n(\mathrm{X})$, la condition $\omega_{|\delta\mathrm{C}_c^n(\mathrm{X})} = 0$ est équivalente à ce que $\langle \omega, \delta(h)\rangle = 0$ pour tout $h \in \mathrm{C}_c^{n-1}(\mathrm{X})$. Par l'identité (3.2.1), ceci est encore équivaut à dire que, pour tout $h \in \mathrm{C}_c^{n-1}(\mathrm{X})$, $\langle \delta^*(\omega), h\rangle = 0$ (où $\delta^* = \delta_{n-1}^*$) ce qui est enfin équivaut à ce que $\delta^*(\omega) = 0$, c'est-à-dire que ω est une forme harmonique sur X. On a donc le résultat :

Théorème 3.3. — *Le dual algébrique de* $\mathrm{H}_c^n(\mathrm{X},\mathbb{C})$ *s'identifie naturellement à* $\mathcal{H}(\mathrm{X},\mathbb{C})$. *Via cette identification, la représentation contragrédiente de* $\mathrm{H}_c^n(\mathrm{X},\mathbb{C})$ *s'identifie à* $\mathcal{H}_\infty(\mathrm{X},\mathbb{C})$.

Remarque 3.4. — Dans le cas particulier où G est un groupe fini et X est un G-complexe simplicial fini, le théorème précédent implique que la représentation contragrédiente de $\mathrm{H}^n(\mathrm{X},\mathbb{C})$ s'identifie à l'espace des formes harmoniques $\mathcal{H}(\mathrm{X},\mathbb{C})$.

3.3. **Cohomologie à support compact dans un système de coefficients.** Pour X un complexe simplicial, un système de coefficients sur X consiste en la donnée d'un système $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\sigma, r_\tau^\sigma)_{\sigma\subset\tau}$, où pour tout $\sigma \in \Sigma_\mathrm{X}$, $\mathcal{F}_\sigma$ est un espace vectoriel complexe et pour tout $\sigma, \tau \in \Sigma_\mathrm{X}$, tel que $\sigma \subset \tau$, $r_\tau^\sigma : \mathcal{F}_\sigma \longrightarrow \mathcal{F}_\tau$ est une application linéaire, telle que :

(a) Pour tout $\sigma \in \Sigma_\mathrm{X}$, $r_\sigma^\sigma = Id$.

(b) Pour tout $\sigma, \tau, \varsigma \in \Sigma_\mathrm{X}$, tel que $\sigma \subset \tau \subset \varsigma$, $r_\varsigma^\tau \circ r_\tau^\sigma = r_\varsigma^\sigma$.

Soit **G** un groupe localement profini et X un **G**-complexe simplicial propre. On dit que **G** agit sur un système de coefficients $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\sigma, r_\tau^\sigma)_{\sigma\subset\tau}$ de X si pour tout $g \in \mathbf{G}$ et tout $\sigma \in \Sigma_\mathrm{X}$, il existe une application linéaire $r_\sigma^g : \mathcal{F}_\sigma \longrightarrow \mathcal{F}_{g.\sigma}$ telle que :

(a) $r_{g.\sigma}^h \circ r_\sigma^g = r_\sigma^{hg}$ pour tout $g, h \in \mathbf{G}$ et $\sigma \in \Sigma_\mathrm{X}$.

(b) $r_\sigma^1 = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_\sigma}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{X}}$.
(c) le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_\sigma \arrow[r, "r_\tau^\sigma"] \arrow[d, "r_\sigma^g"'] & \mathcal{F}_\tau \arrow[d, "r_\tau^g"] \\
\mathcal{F}_{g.\sigma} \arrow[r, "r_{g.\tau}^{g.\sigma}"'] & \mathcal{F}_{g.\tau}
\end{tikzcd}$$

commute pour tout $\sigma \subset \tau$ et pour tout $g \in \mathbf{G}$. En particulier, le stabilisateur $\mathbf{G}_\sigma$ dans $\mathbf{G}$ du simplexe $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{X}}$ agit linéairement sur $\mathcal{F}_\sigma$.

Définition 3.5. — ([13], page 106) Un système de coefficients $\mathbf{G}$-équivariant sur X est un système de coefficients $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\sigma, r_\tau^\sigma)_{\sigma \subset \tau}$ sur X muni d'une action de $\mathbf{G}$ tel que pour tout simplexe σ de X, l'action du stabilisateur $\mathbf{G}_\sigma$ sur $\mathcal{F}_\sigma$ est lisse.

Soit X un complexe simplicial et $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\sigma, r_\tau^\sigma)_{\sigma \subset \tau}$ un système de coefficients sur X. L'espace des p-cochaîne orientées de X à coefficients dans $\mathcal{F}$ est l'espace des fonctions

$$f : \mathrm{X}_{(p)} \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{\mathrm{X}}} \mathcal{F}_\sigma$$

vérifiant :

(a) la fonction f est à support fini.
(b) Pour tout p-simplexe orienté $x = [s_0, ..., s_p]$, $f(x) \in \mathcal{F}_{\sigma_x}$, où σ_x est le p-simplexe $\{s_0, ..., s_p\}$.
(c) $f([s_{\lambda(0)}, ..., s_{\lambda(p)}]) = \varepsilon(\lambda) f([s_0, ..., s_p])$, pour tout $[s_0, ..., s_p] \in \mathrm{X}_{(p)}$ et toute permutation λ de l'ensemble $\{0, 1, ..., p\}$.

On note $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F})$ l'espace des p-cochaînes orientées de X à coefficients dans $\mathcal{F}$ et on définit un opérateur cobord $d_p : \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p+1)}, \mathcal{F})$ par

$$d_p(f)([s_0, ..., s_{p+1}]) = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k r_{\{s_0, \dots, s_{p+1}\}}^{\{s_0, \dots, \widehat{s_k}, \dots, s_{p+1}\}} f([s_0, ..., \widehat{s}_k, ..., s_{p+1}])$$

On obtient ainsi un complexe de cochaînes $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}, \mathcal{F}) = (\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F}), d)$ et on définit alors $\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}, \mathcal{F}) = \mathrm{H}^p(\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}, \mathcal{F}))$ et on l'appelle le p-ième espace de cohomologie à support compact de X à coefficients dans $\mathcal{F}$. Les espaces $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F})$ sont équipés d'une action lisse de $\mathbf{G}$ via

$$g.f(x) = r_{g^{-1}.\sigma_x}^g (f([g^{-1}.s_0, ..., g^{-1}.s_p]))$$

pour tout $g \in \mathbf{G}$, pour tout $f \in \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_p, \mathcal{F})$, et pour tout $x = [s_0, ..., s_p] \in \mathrm{X}_{(p)}$. Les opérateurs cobords sont des morphismes de $\mathbf{G}$-modules, de sorte que les espaces de cohomologie $\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}, \mathcal{F})$ sont munis d'une représentation lisse de $\mathbf{G}$.

Proposition 3.6. — *Soit* X *un* $\mathbf{G}$*-complexe propre et* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\sigma, r_\tau^\sigma)_{\sigma \subset \tau}$ *un système de coefficients* $\mathbf{G}$*-équivariant de* X *et* p *un entier compris entre 0 et la dimension de* X*. Alors la représentation lisse de* $\mathbf{G}$ *dans l'espace* $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F})$ *des* p*-cochaînes orientées de* X *à coefficients dans* $\mathcal{F}$ *est isomorphe à la somme directe*

$$\bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}_p} c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathbf{G}_\sigma}^{\mathbf{G}} \mathcal{F}_\sigma,$$

où $\mathcal{S}_p$ est un système de représentants de l'action de $\mathbf{G}$ *sur l'ensemble des p-simplexes de* X *et pour tout p-simplexe σ,* $\mathbf{G}_\sigma$ *est le stabilisateur global de σ dans* $\mathbf{G}$*. En particulier, si l'action de* $\mathbf{G}$ *sur l'ensemble des p-simplexes de* X *est transitive alors*

$$\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F}) \simeq c\text{-ind}_{\mathbf{G}_\sigma}^{\mathbf{G}} \mathcal{F}_\sigma$$

Démonstration. — Pour tout entier p, l'espace $\mathrm{V}_p = \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F})$ des p-cochaînes orientées de X à coefficients dans $\mathcal{F}$ se décompose en somme directe de sous-espaces vectoriels,

$$\mathrm{V}_p = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{X}_p} \mathrm{V}_p^\sigma$$

où V_p^σ est le sous-espace de $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F})$ constitué des fonctions

$$f : \mathrm{X}_{(p)} \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_\mathrm{X}} \mathcal{F}_\sigma$$

dont le support est égal à $\{x_\sigma^-, x_\sigma^+\}$, où x_σ^-, x_σ^+ sont les deux simplexes orientés correspondants à σ. Comme le système de coefficients $\mathcal{F}$ est $\mathbf{G}$-équivariant, alors le groupe $\mathbf{G}$ permute les sous-espaces V_p^σ. De plus pour tout $g \in \mathbf{G}$ et tout simplexe $\sigma \in \mathrm{X}_p$, $g.\mathrm{V}_p^\sigma = \mathrm{V}_p^{g.\sigma}$. En effet, si $f \in \mathrm{V}_p^\sigma$, alors le support de f est égal à $\{x_\sigma^-, x_\sigma^+\}$. Pour montrer que $g.f \in \mathrm{V}_p^{g.\sigma}$, il suffit de montrer que $\mathrm{Supp}(g.f) = \{g.x_\sigma^-, g.x_\sigma^+\}$. Soit $x \in \mathrm{X}_{(p)}$. Si $x \notin \{g.x_\sigma^-, g.x_\sigma^+\}$ alors $g^{-1}.x \notin \{x_\sigma^-, x_\sigma^+\}$ ce qui implique que $f(g^{-1}.x) = 0$ $(f(g^{-1}.x) \in \mathcal{F}_{g^{-1}.\sigma_x})$. D'autre part $r_{g^{-1}.\sigma_x}^g : \mathcal{F}_{g^{-1}.\sigma_x} \longrightarrow \mathcal{F}_{\sigma_x}$, donc $g.f(x) = r_{g^{-1}.\sigma_x}^g(f(g^{-1}.x)) = 0$. D'où $\mathrm{Supp}(g.f) = \{g.x_\sigma^-, g.x_\sigma^+\}$, et par suite $g.\mathrm{V}_p^\sigma = \mathrm{V}_p^{g.\sigma}$. Soit $\mathcal{S}_p$ un système de représentants de l'action de $\mathbf{G}$ sur l'ensemble des p-simplexes de X. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_p$, le sous-espace

$$\bigoplus_{\tau \in \mathbf{G}.\sigma} \mathrm{V}_p^\tau$$

est clairement $\mathbf{G}$-invariant, c'est donc une sous-représentation de V_p. Le groupe $\mathbf{G}$ permute transitivement les sous-espaces vectoriels V_p^τ de $\bigoplus_{\tau \in \mathrm{H}.\sigma} \mathrm{V}_p^\tau$, alors

$$\bigoplus_{\tau \in \mathbf{G}.\sigma} \mathrm{V}_p^\tau \simeq c\text{-ind}_{\mathbf{G}_\sigma}^{\mathbf{G}} \mathrm{V}_p^\tau$$

où $\mathbf{G}_\tau$ est le stabilisateur global de τ dans $\mathbf{G}$. D'autre part, chaque sous-espace V_p^σ est isomorphe à $\mathcal{F}_\sigma$, puisque l'application $\psi_\sigma : \mathrm{V}_p^\sigma \longrightarrow \mathcal{F}_\sigma,\ f \longmapsto f(x_\sigma^+)$ (pour un choix quelconque de l'orientation) est clairement un isomorphisme. D'où le résultat. □

4. Cohomologie de l'espace $\widetilde{\mathcal{W}}$

4.1. **Combinatoire du complexe $\widetilde{\mathcal{W}}$.** Dans ce paragraphe, on va étudier la combinatoire du complexe $\widetilde{\mathcal{W}}$ à travers sa fibration sur la subdivision barycentrique de l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Le complexe $\widetilde{\mathcal{W}}$ étant non connexe, ses composantes connexes sont les translatés $g.\mathcal{W}$ pour g dans G/G^0. On se ramène donc à l'étude de la combinatoire du sous-complexe G^0-invariant $\mathcal{W}$. Le complexe $\mathcal{W}$ se projette sur la subdivision barycentrique de l'immeuble via l'application $p : \mathcal{W} \longrightarrow \mathrm{sd}(\mathfrak{B}(\mathrm{G}))$, définie sur les sommets par $p(\langle g\mathrm{T}^0 U_\sigma \rangle) = g\sigma$. L'application p est bien définie et elle est clairement simpliciale et G^0-équivariante. Pour tout sommet s de l'immeuble $\mathfrak{B}(G)$, on définit un sous-complexe compact $\mathcal{R}_s$ de $\mathrm{sd}(\mathfrak{B}(G))$ par

$$\mathcal{R}_s = \mathrm{Flag}(\mathcal{R}_{\mathfrak{B}(G)}(s)),$$

où $\mathcal{R}_{\mathfrak{B}(G)}(s) = \{\sigma \in \Sigma_{\mathfrak{B}(G)} /\ s \in \sigma\}$ est le résidu du sommet s dans l'immeuble. Remarquons que la famille $(\mathcal{R}_s)_{s\in\mathfrak{B}(G)}$ forme un recouvrement G^0-équivariant et localement fini de la subdivision barycentrique de l'immeuble. Pour tout sommet s de $\mathfrak{B}(G)$, on note $\mathcal{W}_s$ le sous-complexe $p^{-1}(\mathcal{R}_s)$ de $\mathcal{W}$. Les sous-complexes $\mathcal{W}_s$, lorsque s parcourt l'ensemble des sommets de $\mathfrak{B}(G)$, forment un recouvrement G^0-équivariant et localement fini de $\mathcal{W}$. Soit s un sommet de l'immeuble $\mathfrak{B}(G)$. Les sommets du complexe $\mathcal{W}_s$ sont les sommets $\langle g T^0 U_\sigma\rangle$ de $\mathcal{W}$ tels que $s \in g\sigma$ et les simplexes sont de la forme $\{\langle gT^0U_{\sigma_0}\rangle < .... < \langle gT^0U_{\sigma_p}\rangle\}$ tel que $s \in g\sigma_0 \subset ... \subset g\sigma_p$.

Proposition 4.1. — *Pour tout sommet s de $\mathfrak{B}(G)$, $\mathcal{W}_s$ est le sous-complexe de $\mathcal{W}$ dont les simplexes sont de la forme $\{\langle gT^0U_{\sigma_0}\rangle < .... < \langle gT^0U_{\sigma_p}\rangle\}$ tel que chaque sommet $\langle gT^0U_{\sigma_i}\rangle$ admet un représentant $hT^0U_{\tau_i}$ avec $h \in P_s$ et $s \in \tau_i$.*

Démonstration. — Soit s un sommet de l'appartement $\mathcal{A}$ et $\{d_0 < ... < d_p\}$ un simplexe de $\mathcal{W}_s$, avec $d_i = \langle gT^0U_{\sigma_i}\rangle$, $g \in G^0$ et $s \in g\sigma_0 \subset ... \subset g\sigma_p$. Comme s est un sommet du simplexe $g\sigma_0$, alors $g^{-1}.s$ est un sommet du simplexe σ_0 et donc c'est un sommet de l'appartement $\mathcal{A}$. Les sommets s et $g^{-1}.s$ sont donc deux sommets de $\mathcal{A}$ de même type puisque G^0 préserve l'étiquetage des sommets de l'immeuble. Le groupe T^1 agit transitivement sur les sommets de même type de l'appartement $\mathcal{A}$, il existe alors $t \in T^1$ tel que $tg^{-1}.s = s$. Posons $h = gt^{-1}$ et pour tout $i \in \{0, ..., p\}$, $\tau_i = t.\sigma_i$. La classe $hT^0U_{\tau_i}$ représente le sommet d_i puisque $\langle hT^0U_{\tau_i}\rangle = \langle gt^{-1}T^0U_{t\sigma_i}\rangle = \langle gT^0U_{\sigma_i}\rangle$. De plus, comme $tg^{-1}.s = s$ et $t, g \in G^0$, alors $h \in P_s$. Enfin, comme $g^{-1}.s$ est un sommet de σ_i, alors $s = h^{-1}s = tg^{-1}s$ est un sommet de $t.\sigma_i = \tau_i$. □

D'après la proposition précédente, quitte à changer les représentants des sommets d'un simplexe, on peut toujours supposer qu'un simplexe de $\mathcal{W}_s$ est de la forme

$$\{\langle gT^0U_{\sigma_0}\rangle < .... < \langle gT^0U_{\sigma_p}\rangle\}$$

avec $g \in P_s$ et $s \in \sigma_0 \subset ... \subset \sigma_p$.

Proposition 4.2. — *Pour tout sommet s de $\mathfrak{B}(G)$, le groupe quotient P_s/U_s s'identifie à $\overline{G}$. Via cette identification, le complexe $\mathcal{W}_s$ s'identifie de façon P_s-équivariante au complexe $\mathcal{W}(\overline{G})$.*

Démonstration. — Soit s un sommet de l'appartement $\mathcal{A}$. Rappelons que le lien du sommet s dans $\mathcal{A}$, qu'on note $\mathrm{lk}_{\mathcal{A}}(s)$, est le sous-complexe simplicial de $\mathcal{A}$ formé des simplexes σ qui ne contiennent pas s et tels que $\sigma \cup \{s\}$ est un simplexe. L'ensemble des simplexes du lien $\mathrm{lk}_{\mathcal{A}}(s)$ de s dans l'appartement $\mathcal{A}$ s'identifie au résidu $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(s)$ de s dans $\mathcal{A}$. En effet, l'application $\varphi_s : \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(s) \longrightarrow \mathrm{lk}_{\mathcal{A}}(s)$, qui à un simplexe σ associe le simplexe $\sigma\backslash\{s\}$, est une bijection P_s-équivariante. Le lien dans l'immeuble $\mathrm{lk}_{\mathfrak{B}(G)}(s)$ d'un sommet s s'identifie à l'immeuble de Tits de $\overline{G}$ ([8], proposition page 57). Notons $\varphi : P_s \longrightarrow \overline{G}$ le morphisme de réduction modulo $\mathfrak{p}_F$. On définit une application entre ensembles de sommets $\psi : \mathcal{W}_s \longrightarrow \mathcal{W}(\overline{G})$ par $\psi(\langle gT^0U_\sigma\rangle) = \varphi(g)\overline{T}.\overline{U}_{\varphi_s(\sigma)}$, pour tout sommet $\langle gT^0U_\sigma\rangle$ de $\mathcal{W}_s$, avec $g \in P_s$ et

$s \in \sigma$. L'application ψ est bien définie. En effet, soit α un sommet de $\mathcal{W}_s$, $g_1\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\sigma_1}$ et $g_2\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\sigma_2}$ deux représentants de α tel que $g_1, g_2 \in \mathrm{P}_s$ et $s \in \sigma_1, \sigma_2$. Comme $g_1\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\sigma_1}$ et $g_2\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\sigma_2}$ représentent le même sommet, alors il existe $t \in \mathrm{T}^1$ tel que $g_2\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\sigma_2} = g_1t^{-1}\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{t.\sigma_1}$. Par suite, $\sigma_2 = t.\sigma_1$ et $tg_1^{-1}g_2 \in \mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\sigma_2}$. Or $\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\sigma_2} \subset \mathrm{P}_s$ et $g_1, g_2 \in \mathrm{P}_s$, donc $t \in \mathrm{P}_s$, et on vérifie facilement qu'un élément de T^1 qui fixe un sommet de l'appartement $\mathcal{A}$ est dans T^0. Ainsi, $t \in \mathrm{T}^0$ et $g_2\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\sigma_2} = g_1\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\sigma_1}$. Par passage à la réduction modulo $\mathcal{P}_\mathrm{F}$, on a $\varphi(g_2)\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\varphi_s(\sigma_2)} = \varphi(g_1)\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\varphi_s(\sigma_1)}$. Donc ψ est bien définie, et de plus elle est clairement surjective. Vérifions qu'elle est injective. Soit α_1 et α_2 deux sommets de $\mathcal{W}_s$, $g_1\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\sigma_1}$ et $g_2\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\sigma_2}$ deux représentants de α_1 et α_2 respectivement, avec $g_1, g_2 \in \mathrm{P}_s$ et $s \in \sigma_1, \sigma_2$. On suppose que α_1 et α_2 ont même image par ψ, alors $\varphi(g_1)\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\varphi_s(\sigma_1)} = \varphi(g_2)\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\varphi_s(\sigma_2)}$. Ceci implique que $\varphi_s(\sigma_1) = \varphi_s(\sigma_2)$, donc $\sigma_1 = \sigma_2$ puisque φ_s est bijective, et $\varphi(g_1^{-1}g_2) \in \overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\varphi_s(\sigma_2)}$. Mais $\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\varphi_s(\sigma_2)} = \varphi(\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\sigma_2})$, et comme $\ker(\varphi) = \mathrm{U}_s \subset \mathrm{U}_{\sigma_2}$, on a $g_1^{-1}g_2 \in \mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\sigma_2}$. D'où $\alpha_1 = \alpha_2$. Par suite, pour tout sommet s de l'appartement $\mathcal{A}$, $\psi : \mathcal{W}_s \longrightarrow \mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ est un isomorphisme P_s-équivariant de complexes simpliciaux. Pour un sommet quelconque s de l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, comme G^0 agit transitivement sur les sommets de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ et comme $g.\mathcal{W}_s = \mathcal{W}_{g.s}$ pour tout sommet s et tout $g \in \mathrm{G}^0$, le complexe $\mathcal{W}_s$ est le translaté de $\mathcal{W}_{s_0}$ pour un certain sommet s_0 de l'appartement $\mathcal{A}$. Par conséquent, $\mathcal{W}_s$ est isomorphe à $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ et ceci de façon P_s-équivariante. □

Corollaire 4.3. — *Pour tout sommet s de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, $\mathcal{W}_s$ est un sous-complexe connexe et compact de $\mathcal{W}$.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, pour tout sommet de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, le complexe $\mathcal{W}_s$ est isomorphe à $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$. Il suffit donc de montrer que ce dernier complexe est connexe. Comme $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ est le complexe des classes de $\overline{\mathrm{G}}$ relativement à la famille ordonnée de sous-groupes $(\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{C}(\overline{\mathcal{A}})}$ indexées par le cône $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{A}})$ qui est évidemment connexe. D'après la proposition (2.1.6) page 6, le complexe $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ est connexe si et seulement si $\overline{\mathrm{G}}$ est engendré par les sous-groupes $\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_\sigma$, lorsque σ décrit l'ensemble des simplexes du cône $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{A}})$, ce qui est clairement vrai. □

Soit K le nerf du recouvrement $(\mathcal{W}_s)_{s\in\mathfrak{B}(\mathrm{G})}$ du complexe $\mathcal{W}$. C'est le complexe simplicial dont les sommets sont les sommets de l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ et dont les simplexes sont de la forme $\sigma = \{s_0, ..., s_p\}$ tel que, $\mathcal{W}_{s_0} \cap \mathcal{W}_{s_1} \cap ... \cap \mathcal{W}_{s_p} \neq \emptyset$.

Proposition 4.4. — *Le nerf* K *s'identifie de façon* G^0*-équivariante à* $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que, pour tous sommets $s_0, ..., s_p$, deux à deux distincts, de l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, l'intersection $\mathcal{W}_{s_0} \cap \mathcal{W}_{s_1} \cap ... \cap \mathcal{W}_{s_p}$ est non vide si et seulement si $s_0, ..., s_p$ sont les sommets d'un p-simplexe de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Soient donc $s_0, ..., s_p$ des sommets de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. On suppose que $\mathcal{W}_{s_0} \cap \mathcal{W}_{s_1} \cap ... \cap \mathcal{W}_{s_p} \neq \emptyset$ est non vide. Soit α un sommet dans cette intersection et $g\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma$ un représentant de α. Les sommets $s_0, ..., s_p$ appartiennent au simplexe $g\sigma$. Ils forment donc un simplexe de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, et comme ils sont deux à deux distincts alors ils forment un p-simplexe. Réciproquement, soit $\sigma = \{s_0, ..., s_p\}$ un p-simplexe de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Notons α le sommet de $\mathcal{W}$ de représentant $\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma$. Alors α est un sommet de l'intersection $\mathcal{W}_{s_0} \cap \mathcal{W}_{s_1} \cap ... \cap \mathcal{W}_{s_p}$ puisque $s_i \in \sigma$ pour tout i. □

Pour tout simplexe σ de l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, on note $\mathcal{W}_\sigma = \bigcap_{s\in\sigma} \mathcal{W}_s$. C'est le sous-complexe simplicial de $\mathcal{W}$ dont les sommets sont les sommets $\langle g\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\tau\rangle$ de $\mathcal{W}$

tel que $\sigma \subset g\tau$ et les simplexes sont de la forme

$$\{\langle g\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\tau_0}\rangle < .... < \langle g\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\tau_p}\rangle\},$$

tel que $\sigma \subset g\tau_0 \subset ... \subset g\tau_p$.

PROPOSITION 4.5. — *Pour tout simplexe σ de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ de dimension $p \geqslant 1$, $\mathcal{W}_\sigma$ est un sous-complexe compact, non connexe en général, de $\mathcal{W}$. De plus,*

$$\dim(\mathcal{W}_\sigma) = n - 1 - p.$$

Démonstration. — Soit σ un simplexe de l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ de dimension $p \geqslant 1$. Le complexe $\mathcal{W}_\sigma$ est l'intersection des $\mathcal{W}_s$, lorsque s parcourant l'ensemble des sommets de σ. Comme chaque complexe $\mathcal{W}_s$ est compact d'après le corollaire (4.1.3), alors $\mathcal{W}_\sigma$ est compact. Montrons que $\mathcal{W}_\sigma$ est de dimension $n-1-p$. Un simplexe de dimension maximale de $\mathcal{W}_\sigma$ est de la forme,

$$\{\langle g\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\tau_0}\rangle < ... < \langle g\mathrm{T}^0\mathrm{U}_{\tau_k}\rangle\}$$

avec $\sigma \leqslant g\tau_0 < g\tau_1 < ... < g\tau_k$. Ceci implique que $\{g\tau_0 < g\tau_1 < ... < g\tau_k\}$ est un drapeau maximal de simplexes de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ contenant σ. En particulier on a $n-1 = \dim(\tau_k) = \dim(\sigma) + k$, par suite $\dim(\mathcal{W}_\sigma) = k = n-1-p$. Le complexe $\mathcal{W}_\sigma$ n'est pas connexe en général. Par exemple si σ est une chambre, la dimension de $\mathcal{W}_\sigma$ est égale à zéro. Si on suppose que $\mathcal{W}_\sigma$ est connexe, il sera constitué d'un seul sommet, ce qui est clairement faux. □

4.2. **Cohomologie de l'espace $\widetilde{\mathcal{W}}$.** Le complexe simplicial $\mathcal{W}$ est un G^0-complexe propre, ses espaces de cohomologie à support compact sont alors équipés de représentations lisses de G^0. Dans cette section, on se propose d'étudier la cohomologie de cet espace comme G^0-module lisse. D'après la section (4.1), la famille $(\mathcal{W}_s)_{s\in\mathfrak{B}(\mathrm{G})}$ est un recouvrement G^0-équivariant propre et localement fini du complexe $\mathcal{W}$. Le nerf K de ce recouvrement s'identifie de façon G^0-équivariante à l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. On définit un système de coefficients G^0-équivariant $\mathcal{H}^q = (\mathcal{H}^q_\sigma, v^\sigma_\tau)_{\sigma\subset\tau}$ sur le nerf $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ par :

(a) Pour tout simplexe σ de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, $\mathcal{H}^q_\sigma = \mathrm{H}^q(\mathcal{W}_\sigma, \mathbb{C})$.
(b) Pour tout simplexes σ et τ de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, $\sigma \subset \tau$, $v^\sigma_\tau : \mathrm{H}^q(\mathcal{W}_\sigma, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathcal{W}_\tau, \mathbb{C})$ est le morphisme induit en cohomologie par l'inclusion de $\mathcal{W}_\tau$ dans $\mathcal{W}_\sigma$.

D'après le théorème A de l'introduction, il existe une suite spectrale E^r dans la catégorie des G^0-modules lisses dont le second terme est donnée par

$$\mathrm{E}^2_{p,q} = \mathrm{H}^p_c(\mathrm{K}, \mathcal{H}^q) \simeq \mathrm{H}^p_c(\mathfrak{B}(\mathrm{G}), \mathcal{H}^q)$$

tel que,

$$\mathrm{E}^2_{p,q} \underset{p}{\Rightarrow} \mathrm{H}^{p+q}_c(\mathcal{W}, \mathbb{C}).$$

Pour tout entier naturel m, il existe donc une filtration décroissante de $\mathrm{H}^m_c(\mathcal{W}, \mathbb{C})$ dans la catégorie des G^0-modules lisses telle que le gradué pour cette filtration soit donné par :

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{H}^m_c(\mathcal{W}, \mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{p+q=m} \mathrm{E}^\infty_{p,q}. \tag{4.2.1}$$

PROPOSITION 4.6. — *La suite spectrale E^r est n-triangulaire, c'est-à-dire vérifie : pour tout $r \geqslant 2$, pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$ tel que $p+q \geqslant n$, $\mathrm{E}^r_{p,q} = 0$.*

Démonstration. — Le résultat découle du fait que $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{H}^q) = 0$ pour $p + q \geqslant n$. En effet, d'après la proposition (4.1.5) pour tout p-simplexe σ de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$, $\dim(\mathcal{W}_\sigma) = n - p - 1$. Donc $\mathcal{H}_\sigma^q = \mathrm{H}^q(\mathcal{W}_\sigma, \mathbb{C}) = 0$ pour $q \geqslant n - p$, ce qui implique que $\mathrm{C}_c^{or}(\mathfrak{B}(\mathrm{G})_{(p)}, \mathcal{H}^q) = 0$ pour $p + q \geqslant n$. D'où le résultat. □

Corollaire 4.7. — *La suite spectrale* E^r *converge vers son* n*-ième terme.*

Démonstration. — Découle de la proposition précédente. □

D'après le corollaire précédent, l'isomorphisme (4.2.1) devient :

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^m(\mathcal{W}, \mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{p+q=m} \mathrm{E}_{p,q}^n. \tag{4.2.2}$$

Dans la suite de cette section, on s'intéresse au G^0-module lisse $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}, \mathbb{C})$. En effet, d'après des calculs faits dans le cas $n = 3$, on s'attend à ce que les représentations cuspidales irréductibles de niveau zéro apparaissent dans le $(n-1)$-ième espace de cohomologie à support compact du complexe $\widetilde{\mathcal{W}}$. La difficulté de l'étude de la cohomologie du complexe $\mathcal{W}$ est que l'on ne peut pas décrire explicitement les G^0-modules lisses intervenant dans l'isomorphisme (4.2.2) ci-dessus. Par contre, on peut quand même décrire les termes $\mathrm{E}_{p,q}^n$ intervenant dans la cohomologie en dimension supérieure.

Proposition 4.8. — *Dans l'isomorphisme* (4.2.2) *ci-dessus on a les identifications suivantes :*

i) *Le* G^0*-module lisse* $\mathrm{E}_{0,n-1}^n$ *s'identifie à la somme directe*
$$\bigoplus_{s \in \mathrm{C}} c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_s}^{\mathrm{G}^0} \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C})$$
où C *est une chambre de* $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$*.*

ii) *Le* G^0*-module lisse* $\mathrm{E}_{1,n-2}^n$ *s'identifie à* $\mathrm{H}_c^1(\mathfrak{B}(\mathrm{G}), \mathcal{H}^{n-2})$*.*

iii) *Pour* $0 \leqslant p, q \leqslant n-1$*, avec* $p + q = n - 1$ *et* $0 \leqslant q \leqslant n - 3$*, le* G^0*-module lisse* $\mathrm{E}_{p,q}^n$ *s'identifie à un quotient de* $\mathrm{H}_c^p(\mathfrak{B}(\mathrm{G}), \mathcal{H}^q)$*.*

Démonstration. — i) et ii) On va montrer que les termes $\mathrm{E}_{0,n-1}^2$ et $\mathrm{E}_{1,n-2}^2$ de la deuxième page de la suite spectrale E^r ne changent pas dans les pages suivantes, c'est-à-dire que

$$\mathrm{E}_{0,n-1}^k = \mathrm{E}_{0,n-1}^2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}_{1,n-2}^k = \mathrm{E}_{1,n-2}^2$$

pour tout entier $k \geqslant 2$. Pour $p = 0, 1$, les différentielles dans la deuxième page autour du terme $\mathrm{E}_{p,q}^2$, avec $p + q = n - 1$, sont représentées par le diagramme suivant :

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{E}_{p-2,q+1}^2 \xrightarrow{d} \mathrm{E}_{p,q}^2 \xrightarrow{d} \mathrm{E}_{p+2,q-1}^2 \longrightarrow \cdots$$

Notons T_n l'ensemble des points (a, b) du réseau $\mathbb{Z}^2$ du plan se situant dans le premier cadrant du plan et tel que $a + b \leqslant n - 1$. La suite spectrale E^r étant n-triangulaire, tous les termes $\mathrm{E}_{a,b}^2$, avec (a, b) en dehors de T_n, sont nuls. Pour $p = 0, 1$, il est clair que les deux points $(p-2, q+1)$ et $(p+2, q-1)$ sont en dehors de T_n, et donc les deux termes $\mathrm{E}_{p-2,q+1}^2$ et $\mathrm{E}_{p+2,q-1}^2$ sont nuls. Par conséquent, $\mathrm{E}_{p,q}^3 = \mathrm{H}^{p,q}(\mathrm{E}^2) = \mathrm{E}_{p,q}^2$. Avec un raisonnement similaire, on vérifie que $\mathrm{E}_{p,q}^{n-1} = \mathrm{E}_{p,q}^2$. On en déduit les deux égalités

$$\mathrm{E}_{0,n-1}^n = \mathrm{H}_c^0(\mathfrak{B}(\mathrm{G}), \mathcal{H}^{n-1}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}_{1,n-2}^n = \mathrm{H}_c^1(\mathfrak{B}(\mathrm{G}), \mathcal{H}^{n-2}).$$

Montrons que le G^0-module lisse $H_c^0(\mathfrak{B}(G), \mathcal{H}^{n-1})$ s'identifie à la somme d'induites compacte

$$\bigoplus_{s\in C} c\text{-ind}_{P_s}^{G^0} H^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C}),$$

où C est une chambre de $\mathfrak{B}(G)$. Le complexe de cochaînes de l'immeuble $\mathfrak{B}(G)$ à coefficients dans $\mathcal{H}^{n-1}$ est donné par

$$C_c^{or}(\mathfrak{B}(G)_{(0)}, \mathcal{H}^{n-1}) \xrightarrow{d} C_c^{or}(\mathfrak{B}(G)_{(1)}, \mathcal{H}^{n-1}) \xrightarrow{d} C_c^{or}(\mathfrak{B}(G)_{(2)}, \mathcal{H}^{n-1}) \longrightarrow \ldots$$

D'après la proposition (4.1.5), les espaces $C_c^{or}(\mathfrak{B}(G)_{(m)}, \mathcal{H}^{n-1})$ sont nuls pour $m + n - 1 \geqslant n$, c'est-à-dire $C_c^{or}(\mathfrak{B}(G)_{(m)}, \mathcal{H}^{n-1}) = 0$ pour tout $m \geqslant 1$. Par suite, on a l'isomorphisme de G^0-modules lisses $H_c^0(\mathfrak{B}(G), \mathcal{H}^{n-1}) \simeq C_c^{or}(\mathfrak{B}(G)_{(0)}, \mathcal{H}^{n-1})$. D'après la proposition (3.3.2), on a un isomorphisme de G^0-modules lisses

$$C_c^{or}(\mathfrak{B}(G)_{(0)}, \mathcal{H}^{n-1}) \simeq \bigoplus_{s\in \mathcal{S}_0} c\text{-ind}_{P_s}^{G^0} \mathcal{H}_s^{n-1},$$

où $\mathcal{S}_0$ est un système de représentants de l'action de G^0 sur l'ensemble des sommets de $\mathfrak{B}(G)$. Pour toute chambre C de $\mathfrak{B}(G)$, l'ensemble des sommets de C forme un système de représentants de l'action de G^0 sur l'ensemble des sommets de $\mathfrak{B}(G)$. De plus, pour tout sommet s, $\mathcal{H}_s^{n-1} = H^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C})$. Par conséquent, on a

$$H_c^0(\mathfrak{B}(G), \mathcal{H}^{n-1}) \simeq \bigoplus_{s\in C} c\text{-ind}_{P_s}^{G^0} H^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C}).$$

Finalement, on a l'isomorphisme

$$E_{0,n-1}^n \simeq \bigoplus_{s\in C} c\text{-ind}_{P_s}^{G^0} H^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C}).$$

iii) Soit p et q deux entiers tels que $0 \leqslant p, q \leqslant n-1$, avec $p + q = n - 1$ et $0 \leqslant q \leqslant n - 3$. Pour tout entier r compris entre 2 et $n - 1$, on a le diagramme,

$$\ldots \longrightarrow E_{p-r,q+r-1}^r \xrightarrow{d^r} E_{p,q}^r \xrightarrow{d^r} E_{p+r,q-r+1}^r \longrightarrow \ldots$$

Le terme $E_{p+r,q-r+1}^r$ est nul puisque le point $(p + r, q - r + 1)$ est en dehors de T_n. Alors le terme $E_{p,q}^{r+1}$ est un quotient de $E_{p,q}^r$. Comme $E_{p,q}^2$ est égal à $H_c^p(\mathfrak{B}(G), \mathcal{H}^q)$, alors $E_{p,q}^n$ est un quotient de $H_c^p(\mathfrak{B}(G), \mathcal{H}^q)$. □

Des identifications établies dans la proposition précédente, on obtient l'isomorphisme (4.2.3) suivant :

$$\mathrm{Gr}(H_c^{n-1}(\mathcal{W}, \mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{\substack{p+q=n-1\\ 0\leqslant q\leqslant n-3}} E_{p,q}^n \oplus H_c^1(\mathfrak{B}(G), \mathcal{H}^{n-2}) \oplus \bigoplus_{s\in C} c\text{-ind}_{P_s}^{G^0} H^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C}).$$

Proposition 4.9. — *Pour tout sommet s de $\mathfrak{B}(G)$, la représentation de P_s dans $H^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C})$ est triviale sur U_s. Par conséquent, par passage au quotient $H^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C})$ est une représentation du groupe réductif fini $P_s/U_s \simeq \overline{G}$.*

Démonstration. — Le résultat provient du fait que l'action de U_s sur le complexe $\mathcal{W}_s$ est triviale. En effet, soit s un sommet de l'immeuble $\mathfrak{B}(G)$ et α un sommet de $\mathcal{W}_s$ de représentant gT^0U_σ, avec $g \in P_s$ et $s \in \sigma$. Pour tout $u \in U_s$ on a $ugT^0U_\sigma = g(g^{-1}ug)T^0U_\sigma$. Comme U_s est normal dans P_s, on a $g^{-1}ug \in U_s$. D'autre part, U_s est contenu dans T^0U_σ. En effet, si $s \in \sigma$ alors $U_s \subset U_\sigma$. Par suite, un représentant du sommet $u.\alpha$ est $ug\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma = g(g^{-1}ug)\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma = g\mathrm{T}^0\mathrm{U}_\sigma$, d'où $u.\alpha = \alpha$. L'action de U_s sur $\mathcal{W}_s$ étant triviale, son action sur la cohomologie de $\mathcal{W}_s$ est donc aussi triviale. □

Remarque 4.10. — D'après la proposition précédente, déterminer la structure de P_s-module lisse de l'espace $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C})$ revient à déterminer sa structure de $\overline{\mathrm{G}}$-module.

4.3. **Détermination de la représentation** $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C})$**.** Dans ce paragraphe on se propose de déterminer la structure de $\overline{\mathrm{G}}$-module de l'espace $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$. Notons que le complexe $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ est naturellement étiqueté. On fixe une fois pour toutes l'étiquetage $e : \mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}) \longrightarrow \Delta_{n-1} = \{0, ..., n-1\}$ défini par $e(g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_\sigma) = \dim(\sigma) + 1$ pour tout sommet $g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_\sigma$. Il est clair que l'action de $\overline{\mathrm{G}}$ sur $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ préserve l'étiquetage. Nous fixons pour la suite de l'article les notations suivantes :

Pour tout entier naturel p, on note $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^p$ l'ensemble des p-simplexes de $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$. On note $\Omega_{\mathcal{W}}$ l'ensemble des appartements de $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ son appartement standard. Pour $i = 0, 1$, on note $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-2}_i$ l'ensemble des $(n-2)$-simplexes

$$\sigma = \{g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0} < ... < g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_{n-2}}\}$$

de type i, c'est-à-dire tel que $e(g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}) = i$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-2}$, on note $\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}(\sigma)$ l'ensemble des chambres de $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ contenant σ. Enfin, Pour tout ensemble X, on note $\mathcal{F}(X)$ l'espace vectoriel des fonctions complexes sur X.

D'après la remarque (3.2.3), la représentation contragrédiente de $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ s'identifie à l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ des formes harmoniques sur $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$. On rappelle que $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ est l'espace des fonctions complexes f sur l'ensemble des chambres de $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ vérifiant $\sum_{\mathrm{C} \in \mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1}} [\mathrm{C} : \sigma] f(\mathrm{C}) = 0$, pour tout simplexe $\sigma \in \mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-2}$. On a un isomorphisme de $\overline{\mathrm{G}}$-modules,

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1}) \simeq \bigoplus_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}} \mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}. \tag{4.3.1}$$

En effet, un système de représentants de l'action de $\overline{\mathrm{G}}$ sur l'ensemble $\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}$ est donné par l'ensemble $\mathrm{Ch}_{\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}$ des chambres de l'appartement standard. Alors l'application

$$\varphi : \mathcal{F}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}} \mathcal{F}(\overline{\mathrm{G}}),$$

définie par $\varphi(f) = \sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}} f_{\mathrm{C}}$, où f_{C} est la fonction de $\overline{\mathrm{G}}$ donnée par

$$f_{\mathrm{C}}(g) = f(g^{-1}.\mathrm{C}),$$

est linéaire injective et $\overline{\mathrm{G}}$-équivariante. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})})$ et $\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}$. Pour tout $g \in \overline{\mathrm{G}}$ et $t \in \overline{\mathrm{T}}$ on a, $f_{\mathrm{C}}(tg) = f((tg)^{-1}.\mathrm{C}) = f(g^{-1}t^{-1}.\mathrm{C}) = f(g^{-1}.\mathrm{C}) = f_{\mathrm{C}}(g)$ puisque $\overline{\mathrm{T}}$ est le stabilisateur de toute chambre de l'appartement $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. Par suite, f_{C} est dans l'induite $\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}$. De plus, soit un élément $\sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}} f_{\mathrm{C}}$ de $\bigoplus_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}} \mathcal{F}(\overline{\mathrm{G}})$. On définit une fonction f sur l'ensemble $\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}$ par $f(\mathrm{C}') = f_{\mathrm{C}}(g)$, pour tout $\mathrm{C}' \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}$, où C est l'unique chambre de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ telle que C' est dans l'orbite de C et g un élément quelconque de $\overline{\mathrm{G}}$ tel que $g^{-1}.\mathrm{C} = \mathrm{C}'$. On a clairement $\varphi(f) = \sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}} f_{\mathrm{C}}$. D'où, φ est surjective et par conséquent c'est un

isomorphisme de $\overline{\mathrm{G}}$-modules.
Notons $\mathcal{H}_i(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$, $i\in\{0,1\}$, l'espace des fonctions complexes f sur l'ensemble $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1}$ des chambres vérifiant,

$$\sum_{\mathrm{C}\in\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1}}[\mathrm{C}:\sigma]f(\mathrm{C})=0$$

pour tout simplexe $\sigma\in\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})_i^{n-2}$. L'espace $\mathcal{H}_i(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$ est un sous-$\overline{\mathrm{G}}$-module de $\mathcal{F}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1})$ et on $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})=\mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})\cap\mathcal{H}_1(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$.

Proposition 4.11. — *On a un isomorphisme de $\overline{\mathrm{G}}$-modules,*

$$\mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})\simeq\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}}1_{\overline{\mathrm{T}}}$$

Démonstration. — Soit f dans $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$. Pour tout simplexe $\sigma\in\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})_0^{n-2}$,

$$\sum_{\mathrm{C}\in\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1}}[\mathrm{C}:\sigma]f(\mathrm{C})=0$$

Montrons que f est déterminée par ses valeurs sur les ensembles $\mathrm{Ch}_{g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}$, pour tout appartement $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ de $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$. Soit $\sigma\in\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})_0^{n-2}$ fixé,

$$\sigma=\{g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}<...<g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_{n-2}}\}$$

avec τ_0 est le simplexe vide de l'appartement $\overline{\mathcal{A}}$. Pour tout entier j compris entre 0 et $n-2$, notons le sommet $g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_j}$ de σ par s_j. Le simplexe σ est contenu dans l'appartement $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. Soit $i=\max\{j\in\Delta_{n-1}/\ e(s_j)=j\}$. Une chambre C de $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ contenant σ est de la forme

$$\mathrm{C}=\{s_0<...<s_i<s<s_{i+1}<...<s_{n-2}\}$$

où $s=g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau}$ avec τ un simplexe de l'appartement $\overline{\mathcal{A}}$ contenant τ_i et contenu dans τ_{i+1}. Or il existe exactement deux simplexes de $\overline{\mathcal{A}}$ coincés entre τ_i et τ_{i+1}. Ainsi, l'ensemble des chambres de $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ contenant σ est constitué de deux chambres contenues dans l'appartement $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$, qu'on note $\mathrm{C}_0(\sigma)$ et $\mathrm{C}_1(\sigma)$. Remarquons que le coefficient d'incidence $[\mathrm{C}:\sigma]$ vaut 1 pour n'importe quelle chambre contenant σ. Par conséquent, une fonction $f:\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}\longrightarrow\mathbb{C}$ est dans $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$ si et seulement si $f(\mathrm{C}_0(\sigma))+f(\mathrm{C}_1(\sigma))=0$ pour tout $\sigma\in\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})_0^{n-2}$. Par conséquent, pour tout $\mathrm{C},\mathrm{C}'\in\mathrm{Ch}_{g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}$, $f(\mathrm{C})=-f(\mathrm{C}')$ ou $f(\mathrm{C})=f(\mathrm{C}')$. En effet, soit $\mathrm{C},\mathrm{C}'\in\mathrm{Ch}_{g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}$ et $(\mathrm{C}_0,...,\mathrm{C}_k)$ une galerie de l'appartement $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ reliant C à C′ (une telle galerie existe puisque l'appartement $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ est isomorphe à la subdivision barycentrique du cône $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{A}})$ de l'appartement $\overline{\mathcal{A}}$). Pour tout $i=0,...,k-1$, C_i et C_{i+1} sont les uniques chambres de $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ contenant le simplexe $\mathrm{C}_i\cap\mathrm{C}_{i+1}$, on a donc clairement $f(\mathrm{C})=f(\mathrm{C}_0)=\pm f(\mathrm{C}_k)=\pm f(\mathrm{C}')$. Ainsi, f est bien déterminée par ses valeurs sur les ensembles $\mathrm{Ch}_{g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}$ pour tout appartement $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ de $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$. On fixe une chambre C de l'appartement standard $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ et on définit

$$\Psi:\mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})\longrightarrow\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}}1_{\overline{\mathrm{T}}},$$

par $\Psi(f)(x)=f(x^{-1}.\mathrm{C})$. L'application Ψ est bien définie. En effet, pour tout $x\in\overline{\mathrm{G}}$, et $t\in\overline{\mathrm{T}}$, on a $\Psi(f)(tx)=f(x^{-1}t^{-1}.\mathrm{C})=f(x^{-1}.\mathrm{C})=\Psi(f)(x)$ puisque $\overline{\mathrm{T}}$ est le stabilisateur de toute chambre de l'appartement $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. De plus, Ψ est clairement linéaire et équivariante. Soit $f\in\mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$ telle que $\Psi(f)=0$. Alors $f(x.\mathrm{C})=0$

pour tout $x \in \overline{\mathrm{G}}$. Soit $\mathrm{C}' \in \mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1}$, alors C' est contenu dans un appartement $x.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ pour un certain x dans $\overline{\mathrm{T}}$. Les chambres de l'appartement standard $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ forment un système de représentants pour l'action de $\overline{\mathrm{G}}$ sur l'ensemble des chambres de $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$, donc $\mathrm{C}' = x.\mathrm{C}''$ pour une certaine chambre de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. Par suite $\mathrm{C}' = x.\mathrm{C}''$ et $x.\mathrm{C}$ sont deux chambres de l'appartement $x.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. Alors d'après ce qui précède, on a $f(\mathrm{C}') = f(x.\mathrm{C}'') = \pm f(x.\mathrm{C}) = 0$. Donc f est l'application nulle et on en déduit que Ψ est injective. L'application Ψ est aussi surjective. En effet, si $f \in \mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}$, on définit une fonction $h : \mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}$ de la façon suivante. Pour tout $\mathrm{C}' \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}$, C' est contenu dans un unique appartement $x.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$, pour un certain $x \in \overline{\mathrm{G}}$. Alors C' et $x.\mathrm{C}$ sont deux chambres de $x.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. Pour définir l'image par h de C', on fixe une galerie de longueur minimale $(\mathrm{C}_0, ..., \mathrm{C}_m)$ de l'appartement $x.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ reliant C' à $x.\mathrm{C}$ (ie. une suite de chambres de $x.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ telles que deux chambres consécutives sont distinctes et s'intersectent suivant un simplexe de codimension 1, $\mathrm{C}_0 = \mathrm{C}'$ et $\mathrm{C}_m = x.\mathrm{C}$, tels que la longueur m est minimale). On pose $h(\mathrm{C}') = (-1)^m h(x.\mathrm{C})$. Cette définition ne dépend pas de la galerie de longueur minimale reliant C' à $x.\mathrm{C}$ choisie puisque deux telles galeries ont la même longueur. D'après ce qui précède, la fonction h est dans $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ et il est clair que $\Psi(h) = f$. Ainsi, Ψ est surjective. Finallement, Ψ est un isomorphisme de $\overline{\mathrm{G}}$-modules. □

Proposition 4.12. — *L'espace $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ contient une sous-représentation isomorphe à la partie cuspidale de la somme directe*

$$\bigoplus_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A}_{\mathcal{W}})} \mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}$$

Démonstration. — Notons V le $\overline{\mathrm{G}}$-module $\bigoplus_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}} \mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}$. On définit une application

$$\varphi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1})$$

de la façon suivante. Pour tout élément $f = \sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}} f_{\mathrm{C}}$ dans V et pour tout chambre $\mathrm{C}' \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}$, on pose $\varphi(f)(\mathrm{C}') = f_{\mathrm{C}}(x)$, où C est l'unique chambre de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ telle que C' est dans l'orbite de C et x un élément quelconque de $\overline{\mathrm{G}}$ tel que $x^{-1}.\mathrm{C} = \mathrm{C}'$. Cette définition est indépendante du choix de x puisque si $x_1, x_2 \in \overline{\mathrm{G}}$ tel que $x_1^{-1}.\mathrm{C} = x_2^{-1}.\mathrm{C} = \mathrm{C}'$, alors $x_1 x_2^{-1}.\mathrm{C} = \mathrm{C}$ et donc $x_1 = t x_2$ pour un certain $t \in \overline{\mathrm{T}}$ puisque le stabilisateur de C est égal à $\overline{\mathrm{T}}$. Par suite, comme f_{C} est invariante à gauche par $\overline{\mathrm{T}}$, on a $f_{\mathrm{C}}(x_1) = f_{\mathrm{C}}(x_2)$. L'application φ est clairement linéaire, vérifions qu'elle est équivariante. Soit $\mathrm{C}' \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}$ et $g \in \overline{\mathrm{G}}$. Soit C l'unique chambre de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ telle que C' est dans l'orbite de C et x un élément quelconque de $\overline{\mathrm{G}}$ tel que $x^{-1}.\mathrm{C} = \mathrm{C}'$. Alors C est l'unique chambre de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ telle que $g^{-1}\mathrm{C}'$ est dans l'orbite de C et on a $(xg)^{-1}.\mathrm{C} = g^{-1}.\mathrm{C}'$. Par suite $(g.\varphi(f))(\mathrm{C}') = \varphi(f)(g^{-1}.\mathrm{C}') = f_{\mathrm{C}}(xg) = \varphi(g.f)(\mathrm{C}')$. D'où φ est bien équivariante. Notre opérateur d'entrelacement φ est clairement injectif. On va montrer que φ envoie la partie cuspidale de V dans l'espace $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$. Soit $\sigma \in \mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})_1^{n-2}$,

$$\sigma = \{g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0} < ... < g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_{n-2}}\}$$

avec τ_0 est un sommet de l'appartement $\overline{\mathcal{A}}$. Le simplexe σ est contenu dans une unique chambre C' contenu dans l'appartement $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. En effet

$$\mathrm{C}' = \{g\overline{\mathrm{T}} < g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0} < ... < g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_{n-2}}\}$$

est clairement l'unique chambre de $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ contenant σ. Soit C_0 l'unique chambre de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ tel que $\mathrm{C}' = g.\mathrm{C}_0$, $\mathrm{C}_0 = \{\overline{\mathrm{T}} < \overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0} < ... < \overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_{n-2}}\}$. Montrons d'abord que l'ensemble $\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}(\sigma)$ des chambres de $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ contenant σ est donné par, $\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}(\sigma) = \{gu\mathrm{C}_0,\ u \in \overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}\}$. Soit D une chambre de $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ contenant σ, avec $\mathrm{D} = \{h\overline{\mathrm{T}} < h\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\varsigma_0} < ... < h\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\varsigma_{n-2}}\}$. Alors $h\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\varsigma_i} = g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_i}$ pour tout $i = 0, ..., n-2$, ce qui donne $g^{-1}h \in \overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_i}$ et $\varsigma_i = \tau_i$. En particulier $g^{-1}h \in \overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}$, c'est-à-dire qu'il existe $t \in \overline{\mathrm{T}}$ et $u \in \overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}$ tel que $h = gtu$. Donc la chambre D est donnée par,

$$\{gtu\overline{\mathrm{T}} < gtu\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0} < ... < gtu\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_{n-2}}\} = gtut^{-1}.\{\overline{\mathrm{T}} < \overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0} < ... < \overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_{n-2}}\},$$

c'est-à-dire $\mathrm{D} = gu'\mathrm{C}_0$ avec $u' = tut^{-1} \in \overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}$ puisque $\overline{\mathrm{T}}$ normalise $\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}$. D'où pour tout $\sigma \in \mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})_1^{n-2}$, $\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}(\sigma) = \{gu\mathrm{C}_0,\ u \in \overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}\}$, où g dans $\overline{\mathrm{G}}$ et C_0 est l'unique chambre de l'appartement standard $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ telle que σ est contenu dans $g\mathrm{C}_0$. L'espace $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ est le sous-espace des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1})$ vérifiant la condition d'harmonicité,

$$\sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}} [\mathrm{C} : \sigma] f(\mathrm{C}) = 0$$

pour tout simplexe $\sigma \in \mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})_1^{n-2}$. Soit $\sigma \in \mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})_1^{n-2}$, $\sigma = \{g\overline{\mathrm{TU}}_{\tau_0} < ... < g\overline{\mathrm{TU}}_{\tau_{n-2}}\}$ et C_0 l'unique chambre de l'appartement $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ telle que $g.\mathrm{C}_0$ est l'unique chambre de $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ contenant σ. On a

$$\sum_{u \in \overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}} [gu.\mathrm{C}_0 : \sigma] f(gu.\mathrm{C}_0) = 0$$

Remarquons que les coefficients d'incidence $[gu.\mathrm{C}_0 : \sigma]$ sont indépendants de la chambre $gu.\mathrm{C}_0$ contenant σ et sont tous égaux à 1. Donc si on note f_{C} la fonction définie par $f_{\mathrm{C}}(g) = f(g^{-1}\mathrm{C})$ pour tout chambre C de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$, on a

$$\sum_{u \in \overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}} f_{\mathrm{C}_0}(ug^{-1}) = 0$$

pour tout $g \in \overline{\mathrm{G}}$. On en déduit que, pour tout $\mathrm{C} \in \mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1}$, la fonction f_{C} vérifie,

$$\sum_{u \in \overline{\mathrm{U}}} f_{\mathrm{C}}(ug^{-1}) = 0 \qquad (*)$$

pour tout $g \in \overline{\mathrm{U}}$ et tout sous-groupe parabolique standard maximal propre $\overline{\mathrm{P}}$ de $\overline{\mathrm{G}}$ de radical unipotent $\overline{\mathrm{U}}$. Soit $\sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}} f_{\mathrm{C}}$ un élément de la somme directe des $\overline{\mathrm{G}}$-modules $(\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}})^{\mathrm{cusp}}$, lorsque C parcourt l'ensemble des chambres de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. Montrons que $\varphi(f)$ vérifie la condition (*) ci-dessus. Comme pour tout $\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{A}_{\mathcal{W}}}$, f_{C} est dans la partie cuspidale de l'induite $\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}$, alors pour tout sous-groupe parabolique propre $\overline{\mathrm{P}}$ de radical unipotent $\overline{\mathrm{U}}$ on a

$$\sum_{u \in \overline{\mathrm{U}}} f_{\mathrm{C}}(gu) = 0.$$

Soit $g \in \overline{\mathrm{G}}$ et $\overline{\mathrm{P}}$ un sous-groupe parabolique standard maximal propre de $\overline{\mathrm{G}}$ de radical unipotent $\overline{\mathrm{U}}$. On a

$$\sum_{u\in\overline{\mathrm{U}}} f_{\mathrm{C}}(ug) = \sum_{u\in\overline{\mathrm{U}}} f_{\mathrm{C}}(g^{-1}gug) = \sum_{v\in g^{-1}\overline{\mathrm{U}}g} f_{\mathrm{C}}(gv) = 0$$

Donc $\varphi(f)$ est bien dans l'espace $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$. Ainsi, l'opérateur d'entrelacement φ envoit injectivement la partie cuspidale de V dans $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$. □

Proposition 4.13. — *Le $\overline{\mathrm{G}}$-module $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ contient la partie cuspidale de l'induite* $\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}$. *De plus, on a l'isomorphisme*

$$\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}} \simeq (\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}})^{\mathrm{cusp}}.$$

Démonstration. — Soit C une chambre fixée de l'appartement standard $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. On note V_0 le $\overline{\mathrm{G}}$-module $\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}$. Dans la preuve de la proposition (4.3.1), on a vu que l'application $\Psi : \mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{V}_0$, définie par $\Psi(f)(x) = f(x^{-1}.\mathrm{C})$, est un isomorphisme de $\overline{\mathrm{G}}$-modules. Notons $\varphi : \mathrm{V}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ sa réciproque. On vérifie facilement que φ est définie par,

$$\varphi(f)(\mathrm{C}') = \begin{cases} f(x) & \text{si } \mathrm{C}' = x^{-1}.\mathrm{C} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons que φ envoit $\mathrm{V}_0^{\mathrm{cusp}}$ dans $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$. Soit $f \in \mathrm{V}_0^{\mathrm{cusp}}$. Soit $\sigma \in \mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})_1^{n-2}$, un simplexe de la forme $\sigma = \{g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0} < \ldots < g\overline{\mathrm{TU}}_{\tau_{n-2}}\}$, avec τ_0 est un sommet de l'appartement $\overline{\mathcal{A}}$. Le simplexe σ est contenu dans une unique chambre C_σ contenu dans l'appartement $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. Soit C_0 l'unique chambre de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ tel que $\mathrm{C}_\sigma = g.\mathrm{C}_0$, $\mathrm{C}_0 = \{\overline{\mathrm{T}} < \overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0} < \ldots < \overline{\mathrm{TU}}_{\tau_{n-2}}\}$. Dans la preuve de la proposition (4.3.2), on a vu que l'ensemble des chambres de $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ contenant σ est donné par, $\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}(\sigma) = \{gu\mathrm{C}_0,\ u \in \overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}\}$. Par suite, on a

$$\sum_{\mathrm{F}\in\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1}} [\mathrm{F}:\sigma]\varphi(f)(\mathrm{F}) \sum_{\mathrm{F}\in\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}(\sigma)} [\mathrm{F}:\sigma]\varphi(f)(\mathrm{F}) = \sum_{u\in\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}} [gu\mathrm{C}_0:\sigma]\varphi(f)(gu\mathrm{C}_0)$$

On distingue deux cas : si $\mathrm{C}_0 \neq \mathrm{C}$, la dernière somme est clairement nulle, sinon on a

$$\sum_{\mathrm{F}\in\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1}} [\mathrm{F}:\sigma]\varphi(f)(\mathrm{F}) = \sum_{u\in\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}} [gu\mathrm{C}:\sigma]\varphi(f)(gu\mathrm{C}) = \sum_{u\in\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}} [gu\mathrm{C}:\sigma]f(u^{-1}g^{-1})$$

$$= \sum_{u\in\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}} f(u^{-1}g^{-1}) = \sum_{v\in g\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}g^{-1}} f(g^{-1}v),$$

or comme $f \in \mathrm{V}_0^{\mathrm{cusp}}$, pour tout sous-groupe parabolique $\overline{\mathrm{P}}$ de $\overline{\mathrm{G}}$ de radical unipotent $\overline{\mathrm{U}}$, $\sum_{u\in\overline{\mathrm{U}}} f(xu) = 0$, pour tout $x \in \overline{\mathrm{G}}$ puisque la fonction $\widetilde{f}$, définie sur $\overline{\mathrm{G}}$ par $\widetilde{f}(x) = \sum_{u\in\overline{\mathrm{U}}} f(xu)$, est dans l'espace de $\mathrm{V}_0^{\mathrm{cusp}}$ et est invariante à droite par $\overline{\mathrm{U}}$. Par conséquent, on a

$$\sum_{\mathrm{F}\in\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1}} [\mathrm{F}:\sigma]\varphi(f)(\mathrm{F}) = \sum_{v\in g\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0}g^{-1}} f(g^{-1}v) = 0.$$

D'où $\varphi(f)$ est bien dans $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$. Par suite, φ envoie $\mathrm{V}_0^{\mathrm{cusp}}$ dans l'intersection de $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ avec $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ qui est égale à $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$. On en déduit que la restriction de φ à la partie cuspidale de V_0,

$$\varphi : \mathrm{V}_0^{\mathrm{cusp}} \longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C}),$$

est un plongement de $\overline{\mathrm{G}}$-modules. Montrons que le plongement φ induit un isomorphisme de $\mathrm{V}_0^{\mathrm{cusp}}$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$, c'est-à-dire que l'application

$$\varphi : \mathrm{V}_0^{\mathrm{cusp}} \longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$$

est un isomorphisme. Pour cela, il suffit de vérifier que les espaces $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ et $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ ont les mêmes parties cuspidales. L'inclusion

$$\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}} \subset \mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$$

est immédiate puisque l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ est contenu dans $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$. Pour la deuxième inclusion, soit $f \in \mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$. Soit $\sigma \in \mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})_1^{n-2}$, un simplexe de la forme $\sigma = \{g\overline{\mathrm{T}} < g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_0} < \ldots < g\overline{\mathrm{T}}.\overline{\mathrm{U}}_{\tau_{n-2}}\}$, avec τ_0 un sommet de l'appartement $\overline{\mathcal{A}}$. On note C_σ l'unique chambre de l'appartement $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ contenant σ et C_0 l'unique chambre de l'appartement $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ telle que $\mathrm{C}_\sigma = g.\mathrm{C}_0$. On a

$$\sum_{\mathrm{F} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}(\sigma)} [\mathrm{F} : \sigma] f(\mathrm{F}) = \sum_{u \in \mathrm{U}_{\tau_0}} f(gu\mathrm{C}_0) = \sum_{v \in g\mathrm{U}_{\tau_0} g^{-1}} f(v^{-1} g\mathrm{C}_0),$$

or comme f est dans la partie cuspidale de $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$, pour tout sous-groupe parabolique P de $\overline{\mathrm{G}}$ de radical unipotent U, la fonction complexe $\widetilde{f}$ définie sur l'ensemble $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})^{n-1}$ par, $\widetilde{f}(\mathrm{F}) = \sum_{u \in \mathrm{U}} f(u^{-1}.\mathrm{F})$, est invariante par U et donc nulle. Par conséquent, on a

$$\sum_{\mathrm{F} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})}(\sigma)} [\mathrm{F} : \sigma] f(\mathrm{F}) = \sum_{v \in g\mathrm{U}_{\tau_0} g^{-1}} f(v^{-1} g\mathrm{C}_0) = 0.$$

Par suite, f appartient à $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}} \cap \mathcal{H}_1(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C}) = \mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$. D'où la deuxième inclusion et donc l'égalité. □

THÉORÈME 4.14. — *On a l'isomorphisme de* $\overline{\mathrm{G}}$*-modules*

$$\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}} \simeq (\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}})^{\mathrm{cusp}}.$$

Démonstration. — D'après le théorème (3.2.2), la représentation contragrédiente du $\overline{\mathrm{G}}$-module $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ s'identifie à l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ des formes harmoniques. Donc la partie cuspidale de $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ est isomorphe à la partie cuspidale de la contragrédiente $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^\vee$, or la partie cuspidale de la contragrédiente d'un $\overline{\mathrm{G}}$-module V est isomorphe à la contragrédiente de $\mathrm{V}^{\mathrm{cusp}}$. Par suite, la contragédiente de $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$ est isomorphe à $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$, or comme pour tout $\overline{\mathrm{G}}$-module V, la double contragrédiente $\mathrm{V}^{\vee\vee}$ est canoniquement isomorphe à V, alors $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$ est isomorphe à la contragrédiente de $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$. D'après la proposition (4.3.3), la partie cuspidale de $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ est isomorphe à la partie cuspidale de l'induite $\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}$, donc la contragrédiente de $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$ est isomorphe à la contragrédiente de $(\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}})^{\mathrm{cusp}}$ et donc isomorphe à la partie cuspidale de $(\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}})^\vee$, or l'induite $\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}$ est clairement auto-duale, c'est-à-dire isomorphe à sa contragrédiente. Par conséquent, $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$ est isomorphe à $(\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}})^{\mathrm{cusp}}$. □

5. Représentations cuspidales de niveau zéro

5.1. Représentations cuspidales de $\overline{\mathrm{G}}$.

Théorème 5.1. — *Toute représentation cuspidale irréductible de caractère central trivial de $\overline{\mathrm{G}}$ se plonge dans $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$.*

Démonstration. — Soit (π, V) une représentation cuspidale irréductible de caractère central trivial de $\overline{\mathrm{G}}$. Commençons par montrer que (π, V) se plonge dans l'espace des formes harmoniques $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$. Montrons que π se plonge dans $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$. D'après la proposition (4.3.1), la représentation $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$ est isomorphe à l'induite $\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}$. Soit $\overline{\mathrm{M}}$ le sous-groupe mirabolique de $\overline{\mathrm{G}}$, $\overline{\mathrm{U}}$ le sous-groupe unipotent supérieur standard et $\overline{\mathrm{Z}}$ le centre de $\overline{\mathrm{G}}$:

$$\overline{\mathrm{M}} = \left\{ \begin{pmatrix} g & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ g \in \mathrm{GL}_{n-1}(k_{\mathrm{F}}),\ x \in (k_{\mathrm{F}})^{n-1} \right\}$$

et

$$\overline{\mathrm{U}} = \begin{pmatrix} 1 & k_{\mathrm{F}} & \cdots & k_{\mathrm{F}} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & k_{\mathrm{F}} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On fixe un caractère non trivial ψ du groupe additif de k_{F} et on définit un caractère χ du groupe $\overline{\mathrm{U}}$ par,

$$\chi(\begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}) = \psi(x_{1,2} + x_{2,3} + \ldots + x_{n-1,n})$$

Par le modèle de Kirillov, la restriction de π au groupe $\overline{\mathrm{Z}}.\overline{\mathrm{M}}$ est isomorphe à l'induite $\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{Z}}.\overline{\mathrm{U}}}^{\overline{\mathrm{Z}}.\overline{\mathrm{M}}} \chi$. Donc, d'après la formule de Mackey, la restriction de π au groupe $\overline{\mathrm{T}}$ est donnée par,

$$\pi_{|\overline{\mathrm{T}}} = (\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{Z}}.\overline{\mathrm{U}}}^{\overline{\mathrm{Z}}.\overline{\mathrm{M}}} \chi)_{|\overline{\mathrm{T}}} = \bigoplus_{g \in \overline{\mathrm{Z}}.\overline{\mathrm{U}} \backslash \overline{\mathrm{Z}}.\overline{\mathrm{M}} / \overline{\mathrm{T}}} \mathrm{Ind}_{(\overline{\mathrm{Z}}.\overline{\mathrm{U}})^g \cap \overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{T}}} \chi^g = \bigoplus_{g \in \overline{\mathrm{ZU}} \backslash \overline{\mathrm{Z}}.\overline{\mathrm{M}} / \overline{\mathrm{T}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}$$

puisque l'intersection $(\overline{\mathrm{Z}}.\overline{\mathrm{U}})^g \cap \overline{\mathrm{T}}$ est toujours triviale. Alors $\pi_{|\overline{\mathrm{T}}}$ contient le caractère trivial. Par suite, l'espace $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{T}}}(\pi_{|\overline{\mathrm{T}}}, 1_{\overline{\mathrm{T}}})$ est non nul. Par réciprocité de Frobenius, l'espace $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{G}}}(\pi, \mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}})$ est non nul, et donc, par irréductibilité de π, la représentation π se plonge dans $\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}$. Comme π se plonge dans $\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}$, π se plonge donc dans $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$. Fixons un plongement de $\overline{\mathrm{G}}$-modules $\Phi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}$. Comme la représentation π est cuspidale et que Φ est injective, alors $\Phi(\mathrm{V})$ est contenu dans la partie cuspidale de $\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}$, or d'après la proposition (4.3.3) la représentation $(\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}})^{\mathrm{cusp}}$ est contenu dans $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}),\mathbb{C})$, alors Φ est un plongement de V dans l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ des formes harmoniques. Montrons que la représentation V se plonge dans $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$. D'après le théorème (3.2.2) page 10, la représentation $\mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ s'identifie à la contragrédiente de $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$, or on a un opérateur d'entrelacement injectif

$$\Phi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C}) \simeq \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^*$$

Donc en passant aux contragrédientes, on obtient un opérateur d'entrelacement surjectif,

$$\Phi^* : \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})^{**} \simeq \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{V}^*$$

Or, la contragrédiente d'une représentation cuspidale irréductible de $\overline{\mathrm{G}}$ est cuspidale irréductible, donc V^* est cuspidale irréductible. Par conséquent V^* est isomorphe à une sous-représentation de $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$. Comme l'ensemble des classes d'isomorphismes des représentations cuspidales irréductibles de $\overline{\mathrm{G}}$ est stable par contragrédientes, alors V se plonge dans $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$. □

Proposition 5.2. — *Toutes les représentations cuspidales irréductibles de caractère central trivial de* $\overline{\mathrm{G}}$ *apparaissent dans* $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ *avec la même multiplicité égale à*

$$m_{\text{cusp}} = \frac{1}{(q-1)^{n-1}}(q^{n-1}-1)(q^{n-1}-q)\cdots(q^{n-1}-q^{n-2})$$

Démonstration. — Soit (π, V) une représentation cuspidale irréductible de caractère central trivial de $\overline{\mathrm{G}}$. D'après le théorème (4.3.4), la partie cuspidale de la représentation $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ est isomorphe à $(\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}})^{\text{cusp}}$, comme de plus π est cuspidale, alors on a

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{G}}}(\pi, \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})) = \mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{G}}}(\pi, \mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}})$$

et donc

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{G}}}(\pi, \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C}))) = \dim(\mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{G}}}(\pi, \mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}).$$

Or par réciprocité de Frobenius on a,

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{G}}}(\pi, \mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{T}}}^{\overline{\mathrm{G}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}})) = \dim(\mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{T}}}(\pi_{|\overline{\mathrm{T}}}, 1_{\overline{\mathrm{T}}})).$$

Avec les notations de la démonstration du théorème précédent, la restriction de π au groupe $\overline{\mathrm{T}}$ est donnée par,

$$\pi_{|\overline{\mathrm{T}}} = \bigoplus_{g \in \overline{\mathrm{Z}}.\overline{\mathrm{U}} \backslash \overline{\mathrm{Z}}.\overline{\mathrm{M}}/\overline{\mathrm{T}}} 1_{\overline{\mathrm{T}}}.$$

Alors la dimension de l'espace $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{T}}}(\pi_{|\overline{\mathrm{T}}}, 1_{\overline{\mathrm{T}}})$ est égale au cardinal de l'ensemble $\overline{\mathrm{U}} \backslash \overline{\mathrm{Z}}.\overline{\mathrm{M}}/\overline{\mathrm{T}}$. Or un simple calcul donne $|\overline{\mathrm{U}} \backslash \overline{\mathrm{Z}}.\overline{\mathrm{M}}/\overline{\mathrm{T}}| = \frac{1}{(q-1)^{n-1}}(q^{n-1}-1)(q^{n-1}-q)...(q^{n-1}-q^{n-2})$. D'où la dimension de l'espace $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{G}}}(\pi, \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C}))$ est égale à

$$m_{\text{cusp}} = \frac{1}{(q-1)^{n-1}}(q^{n-1}-1)(q^{n-1}-q)...(q^{n-1}-q^{n-2}). \quad \square$$

Remarque 5.3. — Pour $n = 2$, une représentation cuspidale irréductible de caractère central trivial de $\overline{\mathrm{G}}$ apparaît dans $\mathrm{H}^1(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ avec multiplicité 1.

5.2. **Représentations cuspidales de niveau zéro de** G.

THÉORÈME 5.4. — *Toute représentation cuspidale irréductible de niveau zéro de* G *de caractère central trivial sur* ${\mathcal{O}_{\mathrm{F}}}^{\times}$ *est isomorphe à un sous-quotient irréductible de*
$$\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}, \mathbb{C}).$$

Démonstration. — Soit (π, V) une représentation cuspidale irréductible de niveau zéro de G de caractère central trivial sur $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}^{\times}$. D'après la construction des représentations cuspidales irréductibles de niveau zéro de G donnée dans [7] ou dans [10], il existe une représentation cuspidale irréductible $\bar{\sigma}$ de $\overline{\mathrm{G}}$ telle que $\pi = c\text{-ind}_{\mathrm{ZK}}^{\mathrm{G}} \widehat{\sigma}$, où K est le sous-groupe compact maximal $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{\mathrm{F}})$, Z est le centre de G, σ l'inflation de $\bar{\sigma}$ à K, et $\widehat{\sigma}$ l'unique extension de σ à ZK vérifiant $\widehat{\sigma}(zk) = \omega_\pi(z)\sigma(k)$ pour tout $z \in \mathrm{Z}$ et $k \in \mathrm{K}$, où ω_π est le caractère central de π. D'après le théorème (5.1.1), la représentation $\bar{\sigma}$ de $\overline{\mathrm{G}}$ se plonge dans l'espace $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$, donc sa relevée σ se plonge dans $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C})$ comme représentation lisse de K, où s est le sommet standard de l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Par conséquent, par exactitude de l'induction compacte, la représentation $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}^0} \sigma$ se plonge dans $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}^0} \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C})$, où s est le sommet standard de l'immeuble $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Donc $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}^0} \sigma$ se plonge dans la somme directe
$$\bigoplus_{s \in \mathrm{C}} c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}^0} \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_s, \mathbb{C}),$$
où C est la chambre standard de $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$. Ainsi, de l'isomorhisme (4.2.3), page 16, la représentation $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}^0} \sigma$ se plonge dans le gradué $\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}, \mathbb{C}))$. Montrons que la représentation $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}} \sigma$ se plonge dans le gradué du G-module lisse $\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}, \mathbb{C})$ pour une certaine filtration décroissante par des sous-G-modules lisses. D'après la proposition (2.2.5) page 9, les composantes connexes du G-complexe simplicial $\widetilde{\mathcal{W}}$ sont les translatés $g.\mathcal{W}$, pour $g \in \mathrm{G}/\mathrm{G}^0$. Donc on a un isomorphisme d'espaces vectoriels,
$$\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{g \in \mathrm{G}/\mathrm{G}^0} \mathrm{H}_c^{n-1}(g.\mathcal{W}, \mathbb{C}).$$
Le groupe G permute transitivement les espaces $\mathrm{H}_c^{n-1}(g.\mathcal{W}, \mathbb{C})$, lorsque g parcourt l'ensemble G/G^0. Alors on a un isomorphisme de G-modules lisses,
$$\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}, \mathbb{C}) \simeq c\text{-ind}_{\mathrm{G}^0}^{\mathrm{G}} \mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}, \mathbb{C}).$$
La filtration décroissante du G^0-module lisse $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}, \mathbb{C})$ donnée par la suite spectrale E^r de la section (4.2), induit par induction compacte de G^0 à G une filtration décroissante de $\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}, \mathbb{C})$. Le gradué de $\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}, \mathbb{C})$ relativement à cette dernière filtration est alors donné par,
$$\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}, \mathbb{C})) = c\text{-ind}_{\mathrm{G}^0}^{\mathrm{G}} \mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}, \mathbb{C})).$$
Comme la représentation $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}^0} \sigma$ se plonge dans $\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}, \mathbb{C}))$, alors par induction compacte la représentation $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}} \sigma$ se plonge dans le gradué de $\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}, \mathbb{C})$. Par conséquent, la représentation $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}} \sigma$ se plonge dans un sous-quotient de l'espace de cohomologie $\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}, \mathbb{C})$. Par transitivité de l'induction compacte on a,
$$c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}} \sigma = c\text{-ind}_{\mathrm{ZK}}^{\mathrm{G}}(c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}} \sigma)$$

Or,

$$c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}}\sigma = c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}}(\widehat{\sigma}_{|\mathrm{K}}) = \widehat{\sigma} \otimes c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}} 1_{\mathrm{K}}.$$

Donc,

$$c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}\sigma = c\text{-ind}_{\mathrm{ZK}}^{\mathrm{G}}(\widehat{\sigma} \otimes c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}} 1_{\mathrm{K}}). \tag{5.2.1}$$

La représentation triviale de ZK est un sous-quotient irréductible de $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}} 1_{\mathrm{K}}$. En effet par réciprocité de Frobenius, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ZK}}(c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}} 1_{\mathrm{K}}, 1_{\mathrm{ZK}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(1_{\mathrm{K}}, 1_{\mathrm{K}}),$$

et donc l'espace des entrelacements de l'induite compacte $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}} 1_{\mathrm{K}}$ dans la représentation triviale de ZK est non nul. Par suite, la représentation 1_{ZK} est un sous-quotient de $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}} 1_{\mathrm{K}}$ puisqu'elle est irréductible. Par conséquent, la représentation $\widehat{\sigma}$ est un sous-quotient de $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}}\sigma$ puisque la représentation trivial de ZK l'est. Donc par exactitude de l'induction compacte et vue l'identité (5.2.1), la représentation $\pi = c\text{-ind}_{\mathrm{ZK}}^{\mathrm{G}}\widehat{\sigma}$ est un sous-quotient de $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}\sigma$. Or on a montré ci-dessus que $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}\sigma$ se plonge dans un sous-quotient de $\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}, \mathbb{C})$. Comme π est un sous-quotient de $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}\sigma$, alors π se plonge dans un sous-quotient de l'espace de cohomologie $\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}, \mathbb{C})$. De plus, π étant irréductible, c'est donc un sous-quotient irréductible de cet espace de cohomologie. □

Remarque 5.5. — Le complexe $\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}})$ est muni d'une action de $\mathrm{K} = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{\mathrm{F}})$ triviale sur $\mathrm{K}^1 = \mathrm{I}_n + \varpi_{\mathrm{F}}\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\mathrm{F}})$. L'espace de cohomologie en dimension supérieure $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}(\overline{\mathrm{G}}), \mathbb{C})$ contient toutes les représentations cuspidales irréductibles de K/K^1 de caractère central trivial. Ce sont les types de niveau zéro pour les représentations cuspidales de niveau zéro et de caractère central trivial sur $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}^{\times}$.

Remerciements

Je remercie mon directeur de thèse Paul Broussous pour ses constants encouragements lors de l'élaboration de ce travail. Je tiens tout particulièrement à remercier Nadir Matringe, Pol Vanhaecke et Abderrazak Bouaziz pour de nombreuses discussions très enrichissantes et instructives ainsi que pour leurs précieux conseils lors de la rédaction de ce travail.

Références

[1] Abramenko, Peter and Brown, Kenneth S. *Buildings : Theory and Applications (Graduate Texts in Mathematics), Springer*, Softcover reprint of hardcover 1st ed. 2008.

[2] Brown, K.S. *Cohomology of Groups (Graduate Texts in Mathematics, No. 87)*, Springer, 1st ed. 1982. Corr. 2nd printing 1994.

[3] Broussous, P. *Representations of PGL(2) of a local field and harmonic cochains on graphs*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol **XVIII**, 541–559 (2009).

[4] Broussous, P. and Courtès, F. *Distinction of the Steinberg representation*, IMRN. International Mathematics Research Notices, **11**, 3140–3157 (2014).

[5] Borel, A. and Serre, J.P. *Cohomologie à support compacts des immeubles de Bruhat-Tits, applications à la cohomologie des groupes S-arithmétiques*, C.R.Acad.sc.Paris, 1971.

[6] Bredon, G.E. *Introduction to compact transformation groups, Volume 46 (Pure and Applied Mathematics)*, Academic Press, 1972.

[7] Carayol, H. *Représentations cuspidales du groupe linéaire*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série, **17**, 191–225 (1984).

[8] Garrett, P.B. *Buildings and Classical Groups*, Chapman and Hall/CRC, 1997.

[9] Munkers, J.R. *Elements Of Algebraic Topology*, Westview Press, 1996.

[10] Murnaghan, F. *Representations of reductive p-adic groups*, "`http://www.math.toronto.edu/murnaghan/courses/mat1197/`", 2009.
[11] Rotman, J. *An Introduction to Homological Algebra (Universitext)*, Springer, 2008
[12] Spanier, E.H. *Algebraic Topology*, Springer, 1994.
[13] Schneider, P. and Stuhler, U. *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building*, Publications mathématiques de l'I.H.E.S, **85**, 97-191 (1997).
[14] Tits, J. *Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs (Lecture Notes in Mathematics)*, Springer, 1986.
[15] Wagoner, J.B. *Homotopy Theory for the p-adic Special Linear group*,Commentarii Mathematici Helvetici, **50**, 535–559 (1975).

Manuscrit reçu le 21 mars 2017,
révisé le 1er novembre 2017,
accepté le 13 novembre 2017.

Anis RAJHI
Université de Sousse ; École supérieure des sciences et technologies de Hammam-Sousse, Hammam Sousse 4011, Tunisie
anis.rajhi@math.univ-poitiers.fr