

# CONFLUENTES MATHEMATICI

François LÊ

**Entre géométrie et théorie des substitutions : une étude de cas autour des vingt-sept droites d'une surface cubique**

Tome 5, n° 1 (2013), p. 23-71.

[http://cml.cedram.org/item?id=CML\\_2013\\_\\_5\\_1\\_23\\_0](http://cml.cedram.org/item?id=CML_2013__5_1_23_0)

© Les auteurs et Confluentes Mathematici, 2013.

*Tous droits réservés.*

L'accès aux articles de la revue « Confluentes Mathematici » (<http://cml.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://cml.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

## ENTRE GÉOMÉTRIE ET THÉORIE DES SUBSTITUTIONS : UNE ÉTUDE DE CAS AUTOUR DES VINGT-SEPT DROITES D'UNE SURFACE CUBIQUE

FRANÇOIS LÊ

Associer théorie des groupes et géométrie est une idée qui nous est aujourd'hui tout à fait habituelle, à tel point que très certainement, bon nombre de mathématiciens la qualifieraient volontiers de naturelle. On ne peut nier que ce façonnement de notre pensée mathématique est hérité, en grande partie du moins, de la promotion du mélange des groupes et de la géométrie faite par Felix Klein en son temps. Deux familles de travaux célèbres de ce dernier illustrent bien cette promotion. L'une d'elles est consacrée à l'icosaèdre et à l'équation quintique, où Klein incorpore de la géométrie à la résolution d'équations algébriques, [39] ; en 1922, commentant la section de ses *Œuvres* contenant ces travaux, il en exprime une idée phare :

« [Un] principe simple et pour ainsi dire évident [est] que des objets géométriques qui se transforment en eux-mêmes par des groupes finis de substitutions linéaires ont en conséquence des propriétés aisément visibles<sup>1</sup>. » [40, p. 255]

L'autre famille de travaux est centrée autour du fameux *Programme d'Erlangen* [38], dont le contenu a particulièrement participé à la diffusion et à l'enracinement de l'idée d'associer théorie des groupes et géométrie. Par exemple pour Jean Dieudonné :

« Le “programme d'Erlangen” de F. Klein est, à juste titre, considéré comme un des jalons les plus importants de l'histoire des mathématiques au XIX<sup>e</sup> siècle. Avec un siècle de recul, on peut dire qu'il constitue une sorte de “ligne de partage des eaux” : il apparaît comme un aboutissement de la longue et brillante évolution de la Géométrie projective depuis le début du siècle, qu'il résume, condense et “explique” grâce à la mise en valeur du rôle fondamental joué par le concept de groupe. » [41, p. IX]

Rappelons à ce sujet que, sans en avoir nié l'importance ou l'influence, Thomas Hawkins<sup>2</sup> a remis en cause le caractère totalement révolutionnaire du *Programme d'Erlangen* — que l'on voit par exemple dans la citation précédente — en montrant d'une part que Sophus Lie et son école ont été fortement liés au développement des idées du *Programme* et d'autre part que ce *Programme* est resté assez largement inconnu pendant une vingtaine d'années suivant sa publication.

Il n'est pas question dans cet article de s'appesantir sur les idées de Klein, mais d'étudier de près une situation particulière, antérieure au *Programme d'Erlangen*, dans laquelle la relation entre groupes et géométrie suscite de nombreux commentaires : il s'agit du lien existant entre les vingt-sept droites d'une surface cubique et les vingt-huit tangentes doubles à une courbe quartique plane et de sa présentation en 1869 par Camille Jordan (1838-1922) et par Carl Friedrich Geiser (1843-1934). Par exemple, dans son *Lehrbuch der Algebra*, Heinrich Weber explicite

---

1. « [Ein] einfache[s] und sozusagen selbstverständliche[s] Prinzip : [...] daß nämlich algebraische Gebilde, welche durch endliche Gruppen linearer Substitutionen in sich übergehen, in folgedessen leicht übersehbare, ausgezeichnete Eigenschaften haben ». Toutes les traductions dans cet article sont les nôtres.

2. [27].

partiellement le lien dont il est question, en mélangeant très nettement géométrie et théorie des groupes :

« Si l'on cherche le groupe des permutations qui laissent inchangée une des racines de l'équation aux tangentes doubles [...], on trouve un groupe qui est encore transitif pour les 27 racines restantes. D'après un théorème géométrique de Geiser, ce groupe est isomorphe au groupe de l'équation de degré 27 dont dépend la résolution du problème des 27 droites sur une surface du troisième ordre<sup>3</sup>. » [67, p. 457]

Cette relation apparemment homogène et sans aspérité entre théorie des groupes et géométrie transparaît également dans les commentaires d'historiens :

« Jordan avait l'intention d'illustrer l'efficacité de la théorie des substitutions en montrant comment elle pouvait être utilisée afin de déduire des liens géométriques (connus) entre des configurations spéciales de droites<sup>4</sup>. » [4, p. 341]

L'objectif de cet article est de revenir sur cette relation entre théorie des groupes et géométrie, autour de la situation des vingt-sept droites d'une surface cubique ; nous serons ainsi amen e à nuancer plus ou moins fortement les propos que nous venons de citer. Car si la lecture de Jordan seul n'incite effectivement pas à problématiser les rapports entre théorie des groupes et géométrie, nous verrons au contraire que la lecture conjointe des travaux de Jordan et de Geiser permet de dévoiler un hiatus entre ces deux disciplines<sup>5</sup>. Nous regarderons plus précisément les travaux de ces deux mathématiciens sur le lien entre les vingt-sept droites et les vingt-huit tangentes doubles, mais également sur un lien analogue, entre les vingt-sept droites et les seize droites des surfaces quartiques   conique double<sup>6</sup>. En 1869 sont publi es séparément deux articles de Geiser : l'un est consacr e aux vingt-huit tangentes doubles et l'autre aux seize droites<sup>7</sup>. Ce sont ces articles que nous allons analyser pour comprendre le point de vue de Geiser. Quant   Jordan, il étudie ces deux situations du point de vue des équations dans son *Traité des substitutions et des équations algébriques*<sup>8</sup>, publi e en 1870, et plus précisément dans le chapitre intitul e « Applications géométriques », que nous présenterons plus tard en détail.

Jusqu'à présent, nous avons utilis e l'expression « théorie des groupes » en l'associant à Klein et à Jordan. Précisons que dans les travaux de Jordan dont il va s'agir dans la suite de cet article, cette théorie des groupes est la théorie des substitutions telle que Jordan la développe dans son *Traité des substitutions et des équations algébriques* — il ne s'agit donc pas de groupes de transformations comme l'entend Klein dans le *Programme d'Erlangen*<sup>9</sup>. Précisons également que dans les parties du

3. « Wenn man die Gruppe der Permutationen aufsucht, die eine der Wurzeln der Doppeltangentengleichung ungeändert lassen, so findet man eine Gruppe, die für die übrigen 27 Wurzeln noch transitiv ist. Diese Gruppe ist nach einem geometrischen Satze von Geiser isomorph mit der Gruppe der Gleichung 27<sup>sten</sup> Grades, von der die Lösung des Problems der 27 Geraden auf einer Fläche dritter Ordnung abhängt. »

4. « Jordan aimed at illustrating the efficiency of the theory of substitutions in showing how it could be used to deduce some (known) geometric connections between special configurations of lines. »

5. Pour les notions de discipline et de théorie en histoire des mathématiques ainsi que de nombreuses références à ce sujet, voir [18, p. 21].

6. Voir le début de la section 2 pour des explications quant à ces seize droites.

7. Respectivement [21] et [22].

8. [34].

9. Voir [41, p. 36] et [69, p. 188]. Notons tout de même que Klein indique clairement vouloir calquer sa théorie des transformations sur celle des substitutions : « Dans la théorie de Galois telle qu'elle est exposée, par exemple, dans le *Traité d'Algèbre supérieure* de Serret ou dans le *Traité des substitutions* de C. Jordan, ce qui fait proprement l'objet des recherches, c'est la théorie même des groupes ou des substitutions ; la théorie des équations en découle comme application. Par analogie, nous voudrions une *théorie des transformations*, une théorie des groupes qui peuvent

*Traité des substitutions* que nous allons étudier, les groupes en question sont bien des groupes de substitutions incarnés, et non pas abstraits<sup>10</sup>, comme le souligne Jeremy Gray :

« [Jordan] a analysé dans le *Traité* une large gamme de situations dans lesquelles des groupes pouvaient être formés en permutant des droites (les 27 droites d'une surface cubique, les 28 bitangentes à une quartique) [...]. La capacité de Jordan à articuler une puissante théorie des groupes finis et à les reconnaître "en nature" plaide certainement pour une compréhension implicite de l'idée de groupe, présentée uniquement par commodité sous l'habit plus familier (pour son public) des groupes de permutations<sup>11</sup>. » [25, p. 118]

Une grande partie de ce que nous allons étudier dans la suite de cet article se trouve donc dans le *Traité des substitutions* de Jordan, important ouvrage dont le but explicite est de

« développer les méthodes de Galois et de les constituer en corps de doctrine, en montrant avec quelle facilité elles permettent de résoudre tous les principaux problèmes de la théorie des équations. » [34, p. VII]

En fait, ce livre représente à la fois l'aboutissement et la synthèse de la dizaine d'années de recherches sur la théorie des substitutions que Jordan a menées depuis sa thèse de 1861. Ouvrage à succès, le *Traité des substitutions* constitue pour les historiens

« un tournant majeur dans le développement de la notion de groupe et de la théorie de Galois, marquant l'achèvement du processus de clarification des idées de Galois sur la résolubilité des équations<sup>12</sup>. » [13, p. 144]

Outre le chapitre des « Applications géométriques » dont nous avons déjà parlé, le *Traité* en comporte un autre concernant les « Applications à la théorie des transcendentes ». Ces deux chapitres contiennent plusieurs résultats que d'autres mathématiciens ont redémontré par la suite<sup>13</sup>. Parmi ces résultats, le lien entre les vingt-sept droites des surfaces cubiques et les seize droites des surfaces quartiques à conique double, retrouvé par Geiser ; mais également l'abaissement d'une équation liée aux seize points singuliers des surfaces de Kummer (cf. *infra* pour quelques détails), retrouvé par Klein ; le caractère monodrome des racines de l'équation de bissection des fonctions elliptiques et hyperelliptiques, retrouvé par Francesco Brioschi ; enfin, un lien entre l'équation aux vingt-sept droites et celle de la trisection des fonctions hyperelliptiques, retrouvé par Alfred Clebsch et Luigi Cremona. Pour Frédéric Brechenmacher, ce dernier résultat était « un des principaux résultats originaux du Livre III et a ainsi joué un rôle clé pour la légitimité du *Traité* comme un tout

---

être engendrés par des transformations d'une nature donnée. » [41, p. 36]. Nous reviendrons sur ce point à la fin de l'article.

10. C'est l'occasion de rappeler au lecteur que la hiérarchie groupes – anneaux – corps à laquelle notre époque nous a habitués ne reflète pas le développement historique de ces notions. Ainsi, le développement de la théorie des groupes (de Galois ou de transformations géométriques) s'est fait, jusqu'au début du XX<sup>e</sup> siècle du moins, indépendamment et parallèlement à celui de la théorie des corps (de nombres ou de fonctions). Voir [12].

11. « [Jordan] analysed in the *Traité* a wide range of situations in which groups could be formed permuting lines (the 27 lines on a cubic surface, the 28 bitangents to a quartic) [...]. Jordan's capacity to articulate a powerful theory of finite groups and to recognise them "in nature" surely argues for an implicit understanding of the group idea presented for convenience only in the more familiar grab (to his audiences) of permutation groups. »

12. Voir [13], dont est tirée la présente citation, pour une analyse de la relecture des travaux de Galois (en particulier par Jordan, p. 173-182).

13. Voir [35, p. 32-33].

ainsi que pour sa réception première<sup>14</sup> ». Pour autant, nous n'en parlerons que peu dans la suite : faisant intervenir des objets issus de l'analyse — les fonctions hyper-elliptiques —, l'articulation disciplinaire exprimée par ce résultat est différente de celle sur laquelle nous souhaitons nous focaliser, à savoir l'articulation entre théorie des substitutions et géométrie.

Cela étant, on voit ainsi que les liens entre droites qui nous intéressent font partie de ces résultats du *Traité des substitutions* qui circulent dès sa parution et qui participent en partie au succès que nous avons évoqué précédemment. Ce succès est d'ailleurs attest e par les lettres de félicitations que Jordan reçoit suite à la parution du *Traité* en particulier de la part des math ematiens ayant cherché à red emontr e les résultats que nous venons d'évoquer<sup>15</sup>. Malheureusement pour notre problème, nous n'avons trouvé aucune lettre  chang e entre Jordan et Geiser ; nous nous baserons donc presque exclusivement sur leurs travaux mathématiques publiés.

Maintenant, afin de pouvoir suivre Jordan le plus fid elment possible lorsque nous regarderons son approche du problème des vingt-sept droites et des autres configurations de droites associées, nous exposerons les « méthodes de Galois » tel qu'il le fait lui-même dans le *Traité des substitutions*. Avant cela, puisque ce sont les vingt-sept droites qui forment la thématique même de notre propos, nous commençons par quelques mots à leur sujet ; ils seront également utiles pour comprendre les recherches de Jordan.

## 1. PROLÉGOMÈNES

**1.1. Vingt-sept droites sur une surface cubique.** En 1849 est publié dans le *Cambridge and Dublin mathematical Journal* un article d'Arthur Cayley dans lequel celui-ci prouve que toute surface cubique contient exactement vingt-sept droites. Cayley y précise que ce résultat avait été établi lors d'une correspondance entre lui-même et George Salmon<sup>16</sup>. Ce dernier le confirme dans son *Treatise on the analytic geometry of three dimensions*<sup>17</sup> et ajoute que c'est à lui-même qu'est due la détermination du nombre, 27, après que Cayley en a eu établi l'existence. Ouvrant la voie à une recherche dense sur les surfaces cubiques<sup>18</sup>, l'existence des vingt-sept droites, « squelette »<sup>19</sup> de leur surface, a été consid er e comme un fait majeur par les contemporains de Cayley et de Salmon :

« Avec certainement autant de bonnes raisons qu'Archimède a fait graver le cylindre, le cône et la sphère sur sa pierre tombale, nos éminents compatriotes pourraient laisser des instructions testamentaires pour que l'eikosiheptagramme cubique soit gravé sur la leur<sup>20</sup>. »  
[65, p. 155]

---

14. « This theorem was indeed one of the main original results of Livre *III* and therefore played a key role for the legitimacy of the *Traité* as a whole as well as for its early reception ». [4, p. 341]. Voir cette référence plus générale pour les questions de collectifs autour de la relation entre les travaux de Jordan et de Galois.

15. Nous aurons l'occasion de parler très brièvement de l'échange entre Cremona et Jordan à la fin de cet article. Les lettres reçues par Jordan sont conservées aux Archives de l' cole Polytechnique.

16. Salmon publie d'ailleurs dans le même volume du *Cambridge and Dublin mathematical Journal* un article dont l'introduction précise qu'il est un supplément à celui de Cayley : [56, p. 496].

17. [58].

18. [61, p. 36].

19. [64, p. 980].

20. « Surely with as good reason as had Archimedes to have the cylinder, cone and sphere engraved on his tombstone might our distinguished countrymen leave testamentary directions for the cubic eikosiheptagram to be engraved on theirs. » L'eikosiheptagramme désigne la figure formée des vingt-sept droites. Nous n'avons vu apparaître ce terme que dans ce passage écrit par Sylvester : il participe ainsi au « style typiquement ampoul  » de celui-ci, [28, p. 2].

Nous en resterons là quant à la célébrité ou les conséquences de la découverte des vingt-sept droites et renvoyons le lecteur à [28], [48] ou [43] pour des renseignements historiques sur le sujet ainsi que de nombreuses références.



FIGURE 1.1. Modèle en plâtre de la surface dite « surface diagonale de Clebsch », ayant la particularité de comporter 27 droites réelles. Elle a pour équation homogène  $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3 = 0$ . Ce modèle fait partie d'une série de plusieurs modèles de surfaces cubiques datant de 1881. Voir [15], où d'autres photographies sont disponibles.

Précisons quelques points. D'une part, Cayley et Salmon utilisaient pour les surfaces cubiques des équations de la forme  $U(x, y, z, w) = 0$ , où  $U$  est un polynôme homogène de degré 3 dont les coefficients sont implicitement supposés complexes et où les inconnues  $x, y, z, w$  représentent des coordonnées homogènes de l'espace. Que ces coordonnées homogènes soient des nombres complexes est également implicite ; ainsi, Cayley et Salmon prenaient en compte des points imaginaires et des points situés à l'infini<sup>21</sup>. Au niveau des vingt-sept droites, certaines peuvent ainsi être

21. Cette considération de points imaginaires ou situés à l'infini est chose standard en ce milieu du XIX<sup>e</sup> siècle. On attribue généralement à Jean-Victor Poncelet la systématisation (dans les années 1820) de l'introduction de ces points. Voir par exemple [3, p. 165]. En termes actuels, les surfaces cubiques sont donc des surfaces algébriques de degré 3 dans l'espace projectif complexe  $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ . Cela étant dit, soulignons bien qu'en 1849, la notion d'espace projectif n'était pas encore dégagée. Pour des éléments d'une histoire de l'espace projectif, voir [1].

situées toutes entières à l'infini ou n'avoir aucun point réel <sup>22</sup>. D'autre part, Cayley et Salmon avaient déjà remarqu e dans leurs articles de 1849 que la présence de singularités sur une surface cubique exige la mise en place d'une multiplicité de comptage des droites afin que le nombre 27 reste valable. Cette remarque étant faite, nous n'aurons dorénavant plus à nous en occuper : dans les textes que nous allons étudier, les surfaces cubiques sont toujours supposées, au moins implicitement, sans singularités.

Il est utile pour la suite d'expliquer quelques configurations particulières des vingt-sept droites. Dans son article de 1849, Cayley avait déjà montré que chacune des 27 droites en rencontre exactement 10 autres, et que ces 10 droites se rencontrent deux par deux, créant ainsi 5 triangles avec la première droite. Par un dénombrement ais e, il montrait ainsi qu'on peut former 45 triangles <sup>23</sup>   partir des 27 droites d'une surface cubique. Remarquons que ces configurations de droites en triangles permettent d'appréhender les relations d'incidence qu'existent entre les vingt-sept droites.

Avec ces 45 triangles, il est possible de former certaines paires de trièdres particuliers puis de grouper ces paires trois par trois. Ces trièdres ont été mis en évidence par Jacob Steiner en 1856 et ont par la suite été baptis es *trièdres de Steiner*. Les définitions précises de ces trièdres, de leurs paires et des triplets de ces paires n'étant pas essentielles pour la suite, nous les omettons volontairement <sup>24</sup>. Le lecteur pourra toutefois retenir qu'il existe 40 tels triplets de paires de trièdres.

Une autre configuration remarquable est celle de *double-six*, qui est un ensemble de douze droites  $a_1, \dots, a_6, b_1, \dots, b_6$  soumises à la règle d'incidence suivante : si on note ces droites dans un tableau

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix},$$

chaque droite rencontre toutes les droites qui ne sont ni sur la même ligne, ni sur la même colonne. Par exemple, la droite  $a_1$  rencontre  $b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ , et aucune des autres. C'est Ludwig Schläfli, en 1858 <sup>25</sup>, qui a défini ces doubles-six et montré qu'avec les 27 droites d'une surface cubique, on pouvait former exactement 36 doubles-six.

Avec ces trois configurations particulières formées à partir des vingt-sept droites, nous avons donn e quasiment toutes les informations concernant les vingt-sept droites sur lesquelles se base Jordan dans son approche du problème de ces droites. Entrons   présent dans le *Traité des substitutions*.

**1.2. Les « méthodes de Galois ».** Les « méthodes de Galois » sont exposées par Jordan dans le premier chapitre du livre III du *Traité*, intitul e « Des irrationnelles ». La plupart des définitions et de la terminologie qu'on y trouve (adjonction, quantités rationnelles, groupe d'une équation, irréductibilité, résolution d'une équation par adjonction, réduites) sont celles qu'utilise Évariste Galois dans son *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* (1831), rest e inédit jusqu'en 1846, année où Joseph Liouville fait publier les * uvres mathématiques d'Évariste Galois* <sup>26</sup>. Dans ce qui suit, nous exposons ces définitions en suivant Jordan et les accompagnons d'interprétations actuelles afin d'en faciliter la compréhension.

Comme Jordan, nous nous donnons une équation algébrique  $F(x) = 0$  de degré  $m$ , de racines  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Il est ici sous-entendu que les coefficients de  $F$  appartiennent à un sous-corps  $k$  de  $\mathbf{C}$ . Des quantités  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$  sont alors dites *adjointes*   l'équation si on considère que les coefficients de l'équation  $F(x) = 0$  sont

22. En 1858, Ludwig Schläfli montre que lorsqu'une surface cubique a une équation à coefficients réels, le nombre de droites réelles est nécessairement 27, 15, 7 ou 3. [59].

23. Cayley et Salmon parlent plutôt de *plans tangents triples*.

24. Voir par exemple [63] ou [28] pour des détails sur ces définitions.

25. [59].

26. [17].

dans le corps  $k(\xi_1, \dots, \xi_r)$ . Jordan appelle *rationnelle* toute quantité exprimable de façon rationnelle en fonction des coefficients de l'équation et des quantités adjointes, c'est-à-dire tout élément de  $k(\xi_1, \dots, \xi_r)$ .

Le théorème fondamental que donne Jordan est celui concernant l'existence du groupe d'une équation :

**THÉORÈME FONDAMENTAL : THÉORÈME I.** — Soit  $F(x) = 0$  une équation dont les racines  $x_1, \dots, x_m$  sont toutes inégales, et à laquelle on peut supposer qu'on ait adjoint certaines quantités auxiliaires  $y, z, \dots$ . Il existera toujours entre les racines  $x_1, \dots, x_m$  un groupe de substitutions tel, que toute fonction des racines, dont les substitutions de ce groupe n'altèrent pas la valeur numérique, soit rationnellement exprimable, et réciproquement. [34, p. 257]

En termes modernes, ce théorème dit qu'il existe un sous-groupe, disons  $G$ , du groupe de permutations  $\mathfrak{S}(x_1, \dots, x_m)$  tel que le sous-corps de  $(k(y, z, \dots))$   $(x_1, \dots, x_m)$  fixé par  $G$  est précisément  $k(y, z, \dots)$ . Il s'agit bien entendu du groupe de Galois<sup>27</sup> de  $F$  sur  $k(y, z, \dots)$ . Dans le cas où aucune quantité n'est adjointe, le groupe est plus simplement baptisé *groupe de l'équation*. Si au contraire des quantités  $y, z, \dots$  sont adjointes, Jordan l'appelle le *groupe de l'équation relatif aux quantités adjointes*, ou encore *groupe réduit par l'adjonction de  $y, z, \dots$* . Si ce théorème fondamental avait déjà été énoncé — de façon quasi identique — et démontré par Galois<sup>28</sup>, Jordan indique que le théorème qu'il donne ensuite lui revient<sup>29</sup>. Il s'agit d'un théorème concernant l'irréductibilité d'une équation<sup>30</sup> :

**THÉORÈME II.** — Toute équation irréductible  $F(x) = 0$  a son groupe transitif, et réciproquement. [34, p. 259]

La *transitivité* du groupe signifie que, si l'on choisit deux racines quelconques de l'équation, on peut toujours trouver une substitution du groupe qui envoie l'une sur l'autre : cela coïncide avec la définition actuelle d'action transitive. Profitons du moment pour donner la définition de Jordan d'un groupe  *$k$  fois transitif*, dans le cadre du groupe d'une équation. Elle coïncide avec la définition actuelle d'action au moins  $k$  fois transitive : pour toute paire de  $k$ -uplets  $(\xi_1, \dots, \xi_k)$  et  $(\xi'_1, \dots, \xi'_k)$  de racines, on peut toujours trouver une substitution du groupe de l'équation envoyant  $\xi_i$  sur  $\xi'_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ .

Une autre notion est la *primitivité* d'un groupe, que Jordan définit à l'envers : un groupe  $G$  est dit *non primitif* s'il est possible de regrouper les lettres sur lesquelles il agit en paquets contenant tous le même nombre de lettres, et tels que toute substitution de  $G$  envoie les éléments d'un paquet sur les éléments d'un même paquet. Une équation est dite *primitive* lorsque son groupe est primitif<sup>31</sup>.

Jordan indique d'ailleurs dans la préface du *Traité* que les trois notions fondamentales de la théorie des substitutions sont la transitivité, la primitivité et surtout la distinction entre groupes simples et composés, et en attribue les paternités respectives à Augustin-Louis Cauchy, à Carl Friedrich Gauss et Niels Henrik Abel, et à Galois. Jordan pose ainsi les jalons d'une certaine histoire de la théorie des substitutions, mais cette histoire est à lire avec circonspection : par exemple, l'*Encyklopädie*

27. Dans la théorie de Galois telle qu'elle est le plus souvent enseignée de nos jours, on définit d'abord le groupe de Galois d'une extension (galoisienne) de corps  $k'/k$  comme étant le groupe des automorphismes de  $k'$  induisant l'identité sur  $k$ . Si  $F \in k[X]$  est un polynôme séparable, le groupe de Galois de l'équation  $F(x) = 0$  est par définition le groupe de Galois d'une extension de décomposition de  $F$  sur  $k$ . On montre alors que tout élément de ce groupe induit une permutation des racines de  $F$ .

28. [17, p. 421].

29. [35, p. 29].

30. La notion d'irréductibilité est la même que celle que nous apprenons aujourd'hui : pour Jordan, une équation est *irréductible* lorsqu'elle n'a aucune racine commune avec aucune équation de degré moindre et à coefficients rationnels. Voir [34, p. 254].

31. [34, p. 34].

*der mathematischen Wissenschaften* attribue la paternité des notions de transitivité et de primitivité   Paolo Ruffini <sup>32</sup>.

Passons maintenant à quelques théorèmes décrivant le comportement du groupe d'une équation lorsqu'on lui adjoint certaines quantités particulières. Jordan consi-d ere d'abord le cas où est adjointe une fonction des racines de l'équation :

THÉORÈME V. — Soient  $G$  le groupe d'une équation  $F(x) = 0$ ,  $\varphi_1$  une fonction rationnelle quelconque de ses racines : 1  celles des substitutions de  $G$  qui n'altèrent pas la valeur numérique de  $\varphi_1$  forment un groupe  $H_1$ ; 2  l'adjonction de la valeur  $\varphi_1$  réduirait le groupe de l'équation précisément à  $H_1$ . [34, p. 261]

En termes modernes, ce théorème dit que si  $\varphi_1 \in k(x_1, \dots, x_m)$ , alors l'ensemble des permutations de  $G$  qui fixent  $\varphi_1$  est un sous-groupe  $H_1$  de  $G$  tel que

$$\text{Gal}(k(x_1, \dots, x_m)/k(\varphi_1)) = H_1.$$

En outre, Jordan énonce en corollaire que l'adjonction de plusieurs fonctions des racines  $\varphi_1, \varphi'_1, \dots$ , réduit le groupe de l'équation à son sous-groupe form e des substitutions qui fixent  $\varphi_1, \varphi'_1, \dots$ . Anticipons un peu sur la suite : dans son étude des équations de la géométrie, Jordan va surtout adjoindre à ces équations une ou plusieurs de leurs racines. Dans le cas de l'adjonction d'une racine  $x_1$ , le groupe  $H_1$  est donc, en termes d'actions de groupes, le stabilisateur de  $x_1$  sous  $G$ .

Enfin, Jordan adjoint à une équation des racines d'une autre équation  $f(z) = 0$ . Il montre alors que si l'on adjoint à l'équation  $F(x) = 0$  (dont le groupe est  $G$ ) toutes les racines de  $f(z) = 0$ , le groupe réduit, également appel e *groupe réduit par la résolution de  $f(z) = 0$* , est permutable aux substitutions de  $G$ . Un corollaire est le suivant :

COROLLAIRE. — Si le groupe  $G$  est simple, il ne peut être réduit par la résolution d'une équation auxiliaire sans se réduire à la seule substitution  $\Gamma [\dots]$  : auquel cas l'équation  $F(x) = 0$  sera compl etement résolue. [34, p. 269]

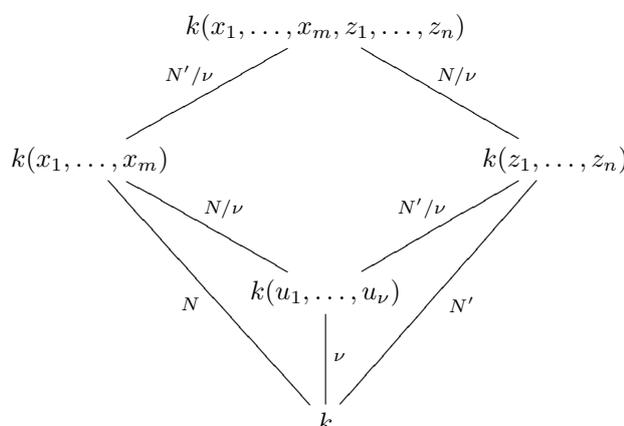
Dire que l'équation  $F(x) = 0$  est *résolue* par l'adjonction des racines  $z_1, \dots, z_n$  de  $f(z) = 0$  signifie ainsi que toutes les racines de  $F$  s'expriment rationnellement en fonction de  $z_1, \dots, z_n$ . Cela se traduit donc par l'inclusion  $k(x_1, \dots, x_m) \subset k(z_1, \dots, z_n)$ . Le théorème suivant indique comment deux équations se résolvent l'une l'autre. Dieudonné indique qu'il s'agit d'un « important complément » aux résultats de Galois, dû à Jordan <sup>33</sup>.

THÉORÈME XIII. — Soient  $F(x) = 0$  et  $f(z) = 0$  deux équations dont les groupes  $G$  et  $G'$  contiennent respectivement  $N$  et  $N'$  substitutions. Si la résolution de la seconde équation réduit le groupe de la première à un groupe  $H_1$  ne contenant plus que  $\frac{N}{\nu}$  substitutions, réciproquement la résolution de la première réduirait le groupe de la seconde à un groupe  $H'_1$  ne contenant plus que  $\frac{N'}{\nu}$  substitutions. De plus, les deux équations sont composées avec une même équation auxiliaire  $\mathcal{F}(u) = 0$  de degré  $\nu$  et dont le groupe contient  $\nu$  substitutions. [34, p. 269]

32. [31, p. 487-488]. Par ailleurs, signalons que Olaf Neumann a particulièrement insisté sur l'importance de la notion d'irréductibilité dans le développement de la théorie des équations. Voir [50].

33. [36, p. xviii].

En guise de traduction moderne, résumons avec un diagramme ce théorème concernant ce que nous appelons les extensions composées :



Un corollaire donné par Jordan<sup>34</sup> est que si le groupe  $G$  d'une équation  $F(x) = 0$  est simple, celle-ci ne peut être résolue qu'au moyen d'équations dont le groupe ait pour ordre un multiple de l'ordre de  $G$ .

La notion de résolution d'une équation par un autre mène à celle d'équations *équivalentes*<sup>35</sup> : les équations  $F(x) = 0$  et  $f(z) = 0$  sont dites équivalentes si la résolution de l'une entraîne la résolution de l'autre, et réciproquement. Vu ce que nous avons écrit précédemment, cela revient à dire que  $k(x_1, \dots, x_m) = k(z_1, \dots, z_n)$ .

Enfin, la notion de *réduite* d'une équation est très souvent utilisée par Jordan, mais n'est pas définie dans le *Traité*<sup>36</sup>. Si une équation  $F(x) = 0$  est donnée, une réduite de cette équation est une équation irréductible sur le corps  $k$  telle que l'adjonction d'une de ses racines a pour effet d'abaisser le groupe  $G$  de  $F(x) = 0$ . Ainsi, si le groupe  $G$  est réduit à un groupe  $H$ , le degré de la réduite est égal à l'indice de  $H$  dans  $G$ <sup>37</sup>, et comme l'écrit Jean Dieudonné,

« [le] problème classique de la recherche des « réduites » d'une équation<sup>38</sup> [...] revient évidemment à la recherche des sous-groupes de [son] groupe, et les réduites de plus petit degré, objet principal de

34. Il s'agit du COROLLAIRE I, [34, p. 270].

35. Contrairement aux autres notions données par Jordan, celle d'équations équivalentes n'apparaît pas dans les écrits de Galois. Une autre notion d'équivalence existait déjà pour les formes algébriques, et notamment pour les formes quadratiques : deux formes quadratiques  $q_1$  et  $q_2$  étaient dites équivalentes si elles vérifiaient l'identité  $q_1(x, y) = q_2(ax + by, cx + dy)$  pour tous les entiers  $a, b, c, d$  tels que  $ad - bc = 1$ . Dans ce cadre-là, un problème consistait à trouver les différentes classes d'équivalence et à y distinguer une forme particulière représentant cette classe. On peut voir une certaine analogie avec la notion d'équivalence d'équations algébriques de Jordan car dans le *Traité*, ce dernier propose de « déterminer toutes les équations irréductibles équivalentes à une équation donnée », et définit de cette façon des *classes* d'équations équivalentes. Voir [34, p. 271-272]. Nous remercions Frédéric Brechenmacher pour ses indications sur cette notion d'équivalence d'équations.

36. Dans son *Cours d'Algèbre supérieure*, Joseph-Alfred Serret indique à plusieurs reprises, en mentionnant Joseph-Louis Lagrange, que les termes « réduite » et « résolvante » sont synonymes : voir par exemple [62, p. 202, p. 235]. En revanche, dans le *Traité des substitutions*, Jordan n'emploie jamais le terme « résolvante ». Cela traduit peut-être la volonté de Jordan de se détacher des méthodes de Lagrange, dont les limites sont évoquées dès le deuxième paragraphe de la préface du *Traité*.

37. Si  $f(x) = 0$  est la réduite en question et si  $k'$  en est un corps de rupture (ce qui correspond à l'adjonction d'une des racines de  $f$ ), le degré de  $f$  est égal au degré de l'extension  $k'/k$ , donc à l'indice de  $H$  dans  $G$ , puisque  $G = \text{Gal}(F/k)$  et  $H = \text{Gal}(F/k')$ .

38. La recherche de formations de réduites, ou résolvantes, d'une équation avait été initiée autour de 1770 par Lagrange, Alexandre-Théophile Vandermonde et Edward Waring. Le but était d'étudier la résolubilité des équations algébriques en introduisant ces équations auxiliaires particulières. Voir par exemple [50].

ces recherches, correspondent aux sous-groupes *maximaux*. » [36, p. XXIII]

Nous avons ainsi pr esent e l'essentiel du chapitre premier du livre « Des irrationnelles ». Les trois autres chapitres de ce livre sont consacr es à des applications des méthodes du premier chapitre ainsi que des livres I et II du *Traite* ; ils sont intitul es, dans l'ordre, « Applications algébriques », « Applications géométriques » et « Applications à la théorie des transcendentes ». L'étude de l'équation correspondant aux vingt-sept droites se trouve bien entendu dans le troisième de ces chapitres.

## 2. LES ÉQUATIONS DE LA GÉOMÉTRIE

Chapeaut e par une courte introduction dont nous allons détailler le contenu dans la section 2.1, le chapitre des « Applications géométriques » est constitu e de six paragraphes, chacun d'eux étant consacr e à une situation particulière :

 I équation de M. Hesse.

 II équations de M. Clebsch.

 III Droites situ es sur les surfaces du quatrième degré à conique double.

 IV Points singuliers de la surface de M. Kummer.

 V Droites situ es sur les surfaces du troisième degré.

 VI Problèmes de contact.

Expliquons brièvement de quoi il s'agit. Le  I concerne les neuf points d'inflexion que possède toute courbe cubique plane. Le  II se rapporte aux courbes cubiques ayant des contacts d'ordre 4 avec une courbe quartique donnée et à d'autres « problèmes de contact »<sup>39</sup>.

Si une surface algébrique est de degré 4, son intersection avec un plan est une courbe (plane) de degré 4. Il peut arriver que cette courbe quartique se r eduisse à une conique comptée avec multiplicité 2. En termes analytiques (c'est-à-dire de géométrie analytique : avec des équations), cela signifie que la courbe quartique-intersection a une équation de la forme  $f(x, y, z)^2 = 0$  avec  $f$  de degré 2. Les surfaces quartiques pour lesquelles cela arrive sont les « surfaces quartiques   conique double ». Tout comme les surfaces cubiques possèdent vingt-sept droites, ces surfaces-là possèdent toutes seize droites<sup>40</sup> ; elles font l'objet du  III. La surface de Kummer du  IV est une surface quartique qui possède le nombre maximal de points singuliers que peuvent avoir ces surfaces, à savoir 16.

Nous avons déjà parlé des droites des surfaces cubiques qui font l'objet du  V. Enfin, le  VI est consacr e aux courbes d'ordre  $n - 3$  tangentes en  $n(n - 3)/2$  points à une courbe de degré  $n$  donnée. Pour  $n = 4$ , il s'agit donc des tangentes doubles à une courbe quartique, au nombre de 28 — ce nombre a été d termin e en 1839 par Julius Plücker, en application des formules qui portent maintenant son nom<sup>41</sup>.

Nous pouvons voir dans les titres des six paragraphes que deux des situations y sont incarnées en équations ( I et  II). Sans commentaire de la part de Jordan à ce sujet, nous ne pouvons qu'émettre des hypothèses quant à un tel choix, au demeurant assez curieux. En effet, il n'y a pas de différence notable au niveau des contenus (méthodes, résultats) des paragraphes, et en particulier, les équations des  I et  II ne sont pas particulièrement mises en avant par rapport aux autres. Par ailleurs, si le nom de Hesse était, en 1870, régulièrement associ e à l'équation donnant les neuf points d'inflexion — justifiant ainsi son emploi dans le premier titre —, on ne peut pas en dire autant du nom de Clebsch et de l'équation déterminant les

39. [34, p. 308].

40. D'après [11, p. 34], c'est Gaston Darboux qui a vu ce résultat le premier, en 1863.

41. Voir la notice nécrologique de Plücker écrite par Clebsch pour quelques détails historiques : [47, p. 199].

courbes cubiques du §II<sup>42</sup>. Cette attribution par Jordan du nom de Clebsch à une famille d'équations montre en tout cas que Jordan souhaite conférer à ce dernier une place certaine dans l'étude de ces équations.

Au sujet de l'influence de Clebsch justement, la lecture des premières lignes de ces six paragraphes révèle, dans trois d'entre eux, des références explicites à ce mathématicien allemand, et en particulier à son mémoire *Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie*<sup>43</sup>. Et effectivement, Jordan indique dans la préface du *Traité* l'importance qu'a eue Clebsch sur l'écriture du chapitre des applications géométriques<sup>44</sup> :

« Nous tenons également à remercier MM. Clebsch et Kronecker des précieuses indications qu'ils nous ont fournies. C'est grâce aux libérales communications de M. Clebsch que nous avons pu aborder les problèmes géométriques du Livre III, Chapitre III. » [34, p. XIII]

À présent, expliquons rapidement la structure des six paragraphes. Dans chacun de ces cas, Jordan forme l'équation associée (cf. *infra* pour les détails) et l'étudie grâce à son groupe,

« dont la connaissance permet réciproquement de rechercher les propriétés plus cachées que présente l'équation, et notamment celles qui concernent sa résolution ». [33]

De fait, Jordan en détermine l'ordre, les facteurs de composition<sup>45</sup> ainsi que les groupes partiels (en termes modernes : les sous-groupes) remarquables, et en déduit diverses réduites de l'équation correspondante.

Il est intéressant de remarquer que Jordan conclut la plupart des paragraphes constituant le chapitre en énonçant des théorèmes plus généraux concernant des familles d'équations englobant celles de la géométrie. Par exemple, le paragraphe I se clôt avec un théorème sur certaines équations dont l'équation aux neuf points d'inflexion est un cas particulier : les équations irréductibles de degré 9 telles que, étant données deux de ses racines  $a, b$ , on puisse en déduire une troisième  $c$  de sorte que

$$c = \psi(a, b), \quad b = \psi(c, a), \quad a = \psi(b, c),$$

où  $\psi$  est une fonction rationnelle et symétrique. Ces équations ont été étudiées par Otto Hesse dans un article de 1847<sup>46</sup>. Hesse montre en particulier que ces équations sont résolubles par radicaux, puis que l'équation donnant les neuf points d'inflexion en est un cas particulier. Jordan donne, toujours dans ce paragraphe I, une autre classe d'équations : celles de degré 8 telles que, étant données trois racines  $a, b, c$ , on puisse en trouver une autre  $d$  telle que  $d = \psi(a, b, c)$ ,  $c = \psi(d, a, b)$ ,  $b = \psi(c, d, a)$ ,  $a = \psi(b, c, d)$ . Il indique que ces équations ont été traitées par Émile Mathieu et qu'elles « se traitent exactement par les mêmes principes » que les autres équations du §I dont nous venons de parler<sup>47</sup>. Ce processus de généralisation traduit peut-être

42. Cette équation n'est d'ailleurs citée ni dans [31], ni dans [11].

43. En français : *Sur l'application des fonctions abéliennes à la géométrie*, [7].

44. Les auteurs de la Notice sur les travaux de Clebsch rappellent eux aussi cette influence : « c'est principalement à [Clebsch] qu'on est redevable d'avoir mis Camille Jordan en état de consacrer aux équations de la Géométrie un chapitre spécial dans son grand Ouvrage », [11, p. 47], traduit en français dans [35, p. 33].

45. Jordan définit les facteurs de composition d'un groupe en [34, p. 41]. En termes modernes, il montre que, étant donné un groupe  $G$ , il existe une suite de groupes  $G \supset H \supset H' \supset \dots \supset \{1\}$ , telle que chacun des groupes soit le plus grand (au sens de l'inclusion) groupe distingué dans le précédent. Les indices  $(G : H)$ ,  $(H : H')$ ,  $\dots$  sont les *facteurs de composition* de  $G$ . Jordan montre que ceux-ci sont uniques à l'ordre près.

46. [29].

47. Sans détailler ces principes, il s'agit à chaque fois d'introduire une notation adéquate des racines, puis une fonction algébrique de ces racines dont le groupe est égal à celui de l'équation. Voir *infra* pour les détails, dans les cas des vingt-sept droites, des vingt-huit tangentes doubles et des seize droites.

la volonté de Jordan de mettre à jour, *via* des équations de la géométrie pour ainsi dire prêtes à être  tudi es, des classes d'équations dont il peut énoncer des résultats quant à leur r solubilit , inscrivant ainsi bel et bien le chapitre des applications géométriques dans le chemin tracé dans la préface du *Traité* :

« Le problème de la résolution par radicaux, qui naguère semblait encore former l'unique objet de la théorie des équations, n'apparaît plus que comme le premier anneau d'une longue chaîne de questions relatives aux transformations des irrationnelles et à leur classification. » [34, p. VI]

De ce fait, les classes d'équations donn es par la géométrie (dont l'«  quation de M. Hesse » et les «  quations de M. Clebsch », voir *supra*), rejoignent par exemple les équations abéliennes et les équations de Galois qui font l'objet du chapitre des « Applications algébriques ».

Pour étudier ces équations de la géométrie, Jordan suit systématiquement une méthode qu'il décrit dans le paragraphe introductif. Cette méthode est également donn e, de façon plus condens e et avec d'autres mots, dans le premier paragraphe d'une Note des *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* du 15 mars 1869, intitul e « Sur les équations de la géométrie »<sup>48</sup>. Cette Note fait partie de la série de publications de Jordan qui ont annoncé la parution du *Traité* et dont le contenu a été peu ou prou reproduit tel quel dans cet ouvrage. Dans cette série se trouve également un article publié dans le *Journal de Liouville* et consacré au problème des vingt-sept droites<sup>49</sup> ; nous aurons l'occasion de nous en servir dans la suite.

**2.1.  tude des équations de la géométrie : *modus operandi*.** Nous décrivons donc ici le mode opératoire proposé par Jordan pour étudier les équations de la géométrie. Nous illustrons chacun des points de la méthode avec le problème des vingt-sept droites, en indiquant en note de bas de page ce qui est omis par Jordan.

Le chapitre du *Traité* concernant les applications géométriques débute ainsi :

« L'un des problèmes les plus fréquents de la géométrie analytique est de déterminer quels sont les points, ou bien les lignes ou surfaces d'une espèce donn e, qui satisfont à certaines conditions. Lorsque le nombre des solutions est limité, les coordonn es du point cherché (ou les paramètres que renferme l'équation des lignes ou surfaces cherch es) sont d termin es par un système d'équations algébriques [...] en nombre égal à celui des inconnues ». [34, p. 310]

Jordan poursuit en notant  $X$  l'équation obtenue en éliminant entre les équations dudit système toutes les inconnues sauf une.   chacune des racines de cette équation correspond une solution du problème en question, et en particulier, le degré de cette équation est égal au nombre des objets (points, lignes ou surfaces) cherchés<sup>50</sup>. C'est

48. [33]. Dans cette note, Jordan annonce en particulier que les « plus remarquables » équations issues de la géométrie sont de type « hyperelliptique », c'est-à-dire qu'elles ont pour degré  $p^{2n}$  avec  $p$  premier et que leur groupe est, dans les termes du *Traité*, « abélien ». Le groupe abélien (de taille  $2n$ , modulo  $p$ ) est défini dans [34, p. 171] : il s'agit de l'ensemble des substitutions (inversibles) qui transforment la fonction  $\varphi = x_1\eta_1 - y_1\xi_1 + \dots + x_n\eta_n - y_n\xi_n$  en un multiple d'elle-même (modulo  $p$ ) en agissant sur les variables  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  et  $(\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_n, \eta_n)$ . En termes et notations modernes — Jordan n'a pas de notation standard pour ce groupe —, le groupe abélien est le produit semi-direct  $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{F}_p) \rtimes \mathbf{F}_p^*$ .   noter que dans la littérature secondaire, il est souvent écrit que la définition de Jordan du groupe abélien co cide avec la définition actuelle de groupe symplectique  $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{F}_p)$ , qui correspond aux substitutions laissant  $\varphi$  inchang e.

49. [32].

50. Regardons le cas particulier des surfaces cubiques. Une droite d'équations  $\begin{cases} x = \alpha z + \beta \\ y = \gamma z + \delta \end{cases}$  est incluse dans une surface cubique d'équation  $F(x, y, z) = 0$  si, et seulement si  $F(\alpha z + \beta, \gamma z + \delta, z) = 0$  pour tout  $z$ . Mais cette dernière équation peut également s'écrire sous la forme

$$f_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta)z^3 + f_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)z^2 + f_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)z + f_0(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0,$$

cette équation  $X$  qui est étudiée par Jordan dans chacune des six situations que nous avons énumérées précédemment. Suivant la situation, elle est baptisée *équation aux vingt-sept droites*, *équation aux vingt-huit tangentes doubles*, etc. : ce sont là les *équations de la géométrie*.

Pour étudier l'équation  $X$ , le point essentiel de la méthode de Jordan est de se baser sur des propriétés connues d'alignement, d'incidence ou d'appartenance des objets représentés par ses solutions. Pour les vingt-sept droites par exemple, Jordan cite Steiner<sup>51</sup> au début du §V pour rappeler :

« Toute surface du troisième degré contient vingt-sept droites ;  
 L'une quelconque d'entre elles,  $a$ , en rencontre dix autres, se coupant elles-mêmes deux à deux, et formant ainsi avec  $a$  cinq triangles. Le nombre total des triangles ainsi formés sur la surface par les vingt-sept droites est de quarante-cinq ;  
 Si deux triangles  $abc$ ,  $a'b'c'$  n'ont aucun côté commun, on peut leur en associer un troisième  $a''b''c''$  tel, que les côtés correspondants de ces trois triangles se coupent, et forment trois nouveaux triangles  $aa'a''$ ,  $bb'b''$ ,  $cc'c''$ . » [34, p. 316]

Pour les autres situations, les propriétés données sont analogues. Par exemple, pour les neuf points des courbes cubiques planes, Jordan rappelle qu'ils sont « situés trois à trois sur douze droites, qui s'y coupent quatre à quatre ».

De façon générale, ces propriétés permettent à Jordan d'introduire une fonction  $\varphi$  des racines de  $X$  dont le groupe<sup>52</sup> contient celui de  $X$ . Ce dernier point est détaillé dans le *Traité* dans le cas des points d'inflexion d'une cubique plane. Il l'est également dans l'article du *Journal de Liouville* consacré à l'équation aux vingt-sept droites que nous avons mentionné précédemment. Regardons ce qu'y fait Jordan.

Jordan note les vingt-sept droites  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, p, q, r, s, t, u, m', n', p', q', r', s', t', u'$  et établit la liste des quarante-cinq triangles grâce aux propriétés qu'il a rappelées :

$abc, ade, afg, ghi, akh, bmn, bpq, brs, btu,$   
 $cm'n', cp'q', cr's', ct'u', dmm', dpp', drr', dtt', enn',$   
 $eqq', ess', euu', fmq', fpn', fst', fur', gnp', gqm',$   
 $gru', gts', hms', hrn', hqt', hup', inr', ism', itq',$   
 $ipu', kma', ktn', kqr', ksp', lnt', lum', lrq', lps'.$

Notant par la même lettre une droite et la racine qui lui correspond dans l'équation  $X$ , il introduit alors<sup>53</sup>

$$\varphi = abc + ade + \dots + lps',$$

dont le groupe  $G$  contient le groupe de l'équation aux vingt-sept droites. En effet, le fait que les droites  $a, b, c$  forment un triangle s'exprime, selon Jordan, par un

où chaque  $f_i$  est un polynôme de degré 3 en  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . L'inclusion de la droite dans la surface équivaut donc au système

$$\begin{cases} f_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0 \\ f_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0 \\ f_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0 \\ f_0(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0. \end{cases}$$

C'est le système annoncé par Jordan — probablement en tout cas, puisqu'il n'en dit rien. L'équation aux vingt-sept droites obtenue en éliminant  $\beta, \gamma$  et  $\delta$  est de degré 27 en  $\alpha$ . À chaque solution  $\alpha$  de cette équation, correspond un triplet  $(\beta, \gamma, \delta)$  et donc une droite incluse dans la surface. Voir [49, p. 347].

51. Jordan réfère à [63], mais ajoute dans la note D située à la fin du *Traité* que Cayley et Salmon avaient découvert les vingt-sept droites avant Steiner. Cette note a été ajoutée suite à une remarque dans une lettre de Cremona à Jordan, qui lui précisait cette paternité.

52. C'est-à-dire le groupe des substitutions des racines de  $X$  qui fixent  $\varphi$ .

53. Ainsi, dans l'expression de  $\varphi$ , le symbole  $abc$  représente le produit des trois racines  $a, b$  et  $c$  de l'équation aux vingt-sept droites qui correspondent aux trois droites  $a, b$  et  $c$ .

système de « relations analytiques »<sup>54</sup>

$$\psi(a, b, c) = 0, \quad \chi(a, b, c) = 0, \dots$$

Si maintenant  $S$  est une substitution de  $G$  et si  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  sont les racines qu'elle fait succéder à  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , alors, puisque  $\psi, \chi, \dots$  sont rationnelles en  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,

$$\psi(a', b', c') = 0, \quad \chi(a', b', c') = 0, \dots,$$

ce qui prouve que  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  forment un triangle, et donc que le terme  $a'b'c'$  apparaît dans  $\varphi$ . Cela montre donc que le groupe de l'équation aux vingt-sept droites est contenu dans le groupe  $G$  de  $\varphi$ .

L'inclusion réciproque de ces groupes est, d'après Jordan, vraie lorsque toutes les « relations géométriques » de la configuration découlent de celles considérées :

« Réciproquement, si l'on admet que toutes les relations géométriques existant entre les vingt-sept droites peuvent se déduire de celles qui précédent, ce qui est au moins fort probable,  $G$  contiendra toutes les substitutions qui n'altèrent pas  $\varphi$  ». [32]

Il admet alors que c'est le cas. Ce problème de l'inclusion réciproque n'est pas spécifique à la configuration des vingt-sept droites, puisque Jordan écrit de façon générale :

« Réciproquement, si l'on était certain de connaître *toutes* les relations géométriques que présente la question proposée (ou du moins celles dont les autres dérivent), le groupe de l'équation  $X$  contiendrait toutes les substitutions du groupe de  $\varphi$ . Mais une semblable certitude est difficile à obtenir, malgré le soin apport e par d'habiles géomètres à l'étude de ces problèmes. Il ne serait donc pas impossible que les équations auxquelles ces problèmes donnent naissance eussent parfois une forme plus particulière encore que celle que nous allons trouver, en nous appuyant sur les résultats obtenus par nos prédécesseurs. » [34, p. 301]

Ainsi, pour chacune des situations géométriques du *Traité*, Jordan exhibe une fonction  $\varphi$  et montre que le groupe de l'équation en question est inclus dans celui de  $\varphi$ . Soulignons que cette fonction  $\varphi$  est une sorte de trait d'union entre géométrie et algèbre : c'est par elle que l'information géométrique (alignement, incidence...) s'incarne en information algébrique (une fonction des racines de l'équation sur laquelle peuvent agir les substitutions du groupe de cette équation). Ce sont ensuite les groupes de ces fonctions  $\varphi$  qui sont  tudi es par Jordan; ils ne sont donc *a priori* pas égaux à ceux des équations géométriques. Cela n'empêche pas Jordan de considérer que les groupes des fonctions  $\varphi$  sont vraiment ceux des équations correspondantes<sup>55</sup>.

Dans son livre sur l'histoire de l'algèbre, Bartel Leendert van der Waerden souligne cette lacune, dans le cas des vingt-sept droites uniquement. Il propose une

54. Nous changeons légèrement la notation de Jordan, qui fait un double emploi de la lettre  $\varphi$ . Les relations en question doivent exprimer que les droites  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont coplanaires. Par exemple, si  $a$  (resp.  $b$ ) est donnée comme intersection de deux plans  $A$  et  $B$  (resp.  $C$  et  $D$ ) d'équations  $Ax + A'y + A''z + A'''w = 0$ , etc., alors la coplanarité de  $a$  et  $b$  se traduit par l'équation

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' & A''' \\ B & B' & B'' & B''' \\ C & C' & C'' & C''' \\ D & D' & D'' & D''' \end{vmatrix} = 0.$$

Or, les coordonnées de la droite  $a$  sont justement des quotients de  $A, A', \dots, B'''$  (voir par exemple [58, p. 24]). La coplanarité de deux droites se traduit donc par une équation rationnelle en les coordonnées de ces droites. Enfin, pour chaque droite, trois de ses coordonnées s'expriment rationnellement en fonction de la quatrième, qui est solution de l'équation  $X$ .

55. Voir par exemple la Note sur les équations de la géométrie [33].

démonstration permettant, dans ce cas-là, de prouver l'inclusion réciproque, c'est-à-dire que le groupe de l'équation aux vingt-sept droites est effectivement le groupe de la fonction  $\varphi$ <sup>56</sup>.

Laissons ce problème de côté et regardons ce que fait Jordan sur l'équation aux vingt-sept droites. Alors que nous nous apprêtons à entrer dans le vif du sujet, nous en profitons pour commenter un petit peu le type de démonstrations qui vont suivre. La généralité y passe souvent par des procédés de particularisation, que ce soit par des choix d'objets (s'incarnant concrètement par un « pour fixer les idées ») ou par de longues énumérations de cas, parfois traités un à un, parfois laissés de côté parce qu'ils sont identiques à d'autres ou parce qu'une démonstration se trouvant ailleurs dans le *Traité* s'y adapte. En cela, elle reflètent bien l'esprit général des preuves du *Traité des substitutions*. On y voit en tout cas Jordan méticuleux et ne reculant pas devant le détail — même si l'on est loin de la suite du *Traité*, où « on le voit énumérer des congruences jusqu'au degré 12 000, dénombrer des types de groupes résolubles jusqu'au degré 1 000 000, ou s'excuser de ce qu'un calcul devienne un peu pénible quand le nombre sur lequel on opère a plus de mille milliards de chiffres<sup>57</sup> ! »

## 2.2. Groupe, ordre et facteurs de composition de l'équation aux vingt-sept droites.

Jordan commence par déterminer l'ordre du groupe  $G$ . D'abord, il constate que les substitutions de  $G$  sont susceptibles de remplacer  $a$  par n'importe quelle racine de  $X$ . Ensuite, parmi les substitutions de  $G$ , celles qui ne déplacent pas  $a$  doivent nécessairement permuter entre eux les cinq termes de  $\varphi$  qui contiennent  $a$  :  $abc, ade, afg, ahi, akl$ . Donc elles sont susceptibles d'envoyer  $b$  sur  $b, c, d, e, f, g, h$  ou  $i$ , ce qui donne au plus 10 choix. Jordan continue ainsi : les substitutions de  $G$  qui fixent  $a$  et  $b$  fixent nécessairement  $c$  et sont susceptibles d'envoyer  $d$  sur  $d, e, f, g, h$  ou  $i$ , ce qui donne au plus 8 choix. Par le même type d'argument, il montre que les substitutions qui fixent  $a, b$  et  $d$  fixent nécessairement  $e$  et permutent entre elles les racines  $m, p, r, t$ , ce qui donne au plus 24 choix. Enfin, Jordan remarque que les substitutions qui fixent  $a, b, d, m, p, r$  et  $t$  fixent en fait toutes les racines. Il déduit de tout cela que l'ordre de  $G$  est au plus  $27 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 24$ .

Réciproquement, Jordan montre que l'ordre de  $G$  est au moins égal à ce nombre en exhibant six substitutions particulières qui permettent de réaliser chacune des substitutions décrites ci-dessus :

$$\begin{aligned} A &= (amu)(cnt)(gq'r')(is'p')(u'ld)(m'ek) \\ B &= (bhk)(cil)(pt'r')(ns'u')(p'tr)(n'su) \\ C &= (dhk)(eil)(m's'u')(pus)(n'r't')(qtr) \\ D &= (ghk)(fil)(n'u's')(mtr)(m't'r')(nus) \\ E &= (fhk)(gil)(p'r't')(ptr)(q's'u')(qsu) \\ F &= (hk)(il)(r't')(s'u')(rt)(su). \end{aligned}$$

Jordan précise sans le prouver que ces substitutions appartiennent bien à  $G$ <sup>58</sup>.

56. Voir [66, p. 128]. Pour cette fameuse inclusion réciproque, van der Waerden commence par déterminer l'ordre du groupe des vingt-huit tangentes doubles d'une courbe quartique. Il en déduit ensuite, grâce aux travaux de Geiser (cf. 3.2.1), que l'ordre du groupe de l'équation aux vingt-sept droites est 51 840. Jordan ayant montré que l'ordre du groupe de  $\varphi$  est égal à ce nombre (cf. 2.2), il y a bien égalité entre le groupe de  $\varphi$  et le groupe de l'équation aux vingt-sept droites.

57. [44, p. LIV].

58. Vérifier ces appartenances est un peu fastidieux, mais pas difficile. Par exemple pour  $A$  : notant  $1, 2, \dots, 45$  les termes de  $\varphi$  dans l'ordre où ils apparaissent, il est assez aisé de voir que  $A$  induit la permutation sur  $\{1, \dots, 45\}$  définie par

$$\left( \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 6 & 38 & 22 & 30 & 14 & 9 & 7 & 8 & 1 & 18 & 34 & 26 & 42 & 21 & 37 & 28 & 13 & 39 & 40 & 41 & 5 & 25 & 23 \\ \\ 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 \\ 24 & 3 & 36 & 19 & 44 & 11 & 33 & 31 & 32 & 4 & 29 & 20 & 12 & 45 & 43 & 10 & 27 & 35 & 17 & 2 & 16 & 15 \end{array} \right).$$

Toujours sans en donner les preuves, Jordan affirme que, combinées entre elles, les substitutions  $A, B, C, D$  et  $E$  permettent d'envoyer  $a$  sur n'importe quelle autre racine ; que  $B, C, D$  et  $E$  fixent  $a$  et peuvent envoyer  $b$  sur n'importe quelle des racines  $b, c, d, e, f, g, h$  ou  $i$  ; que  $C, D$  et  $E$  fixent  $a$  et  $b$ , et permettent d'envoyer  $d$  sur n'importe quelle des racines  $d, e, f, g, h, i, k, l$  ; que  $D$  et  $E$  fixent  $a, b$  et  $d$ , et permettent d'envoyer  $m$  et  $p$  sur deux quelconques racines parmi  $m, p, r, t$  ; enfin, que  $F$  permute  $r$  et  $t$  tout en fixant  $a, b, d, m, p$ . Cela lui permet de voir que  $G$  contient au moins  $27 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 2$  substitutions<sup>59</sup>.

Finalement, le groupe  $G$  est de cardinal  $27 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 2$ , et bien que Jordan ne le souligne pas, sa démonstration montre bien entendu que  $G$  est d eriv e<sup>60</sup> des substitutions  $A, B, C, D, E$  et  $F$ . Jordan continue en notant  $H$  le groupe d eriv e de  $A, B, C, D$  et  $E$ . La démonstration précédente lui prouve que  $H$  est d'ordre au moins  $27 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12$  ; il montre ensuite que  $H$  est d'ordre exactement ce nombre, qu'il est permutable à toutes les substitutions de  $G$ <sup>61</sup> et que c'est un groupe simple. Voici comment il procède.

En ce qui concerne l'ordre de  $H$ , Jordan commence par remarquer que chaque substitution de  $G$  « équivaut à un certain déplacement op er e entre les termes de  $\varphi$  ». Les déplacements, ou substitutions, ainsi obtenus forment un groupe  $G_1$  dont les éléments correspondent un à un à ceux de  $G$ . Il y a dans  $G_1$  un groupe partiel  $\mathcal{S}_1$  form e des substitutions résultant d'un nombre pair de transpositions entre les termes de  $\varphi$ . Ce groupe partiel  $\mathcal{S}_1$  est permutable aux substitutions de  $G_1$  et il lui correspond un groupe partiel  $\mathcal{S}$  dans  $G$ , permutable à toutes les substitutions de celui-ci. Jordan affirme ensuite que les substitutions  $A, B, C, D$  et  $E$  équivalent toutes à un nombre pair de transpositions<sup>62</sup>, et il en déduit que  $H$  est contenu dans  $\mathcal{S}$ . Mais  $F$  n'est pas dans  $\mathcal{S}$  car elle équivaut à un nombre impair de transpositions, ce qui donne la conclusion :  $\mathcal{S}$  contient au plus la moitié des substitutions de  $G$  et contient  $H$  qui en contient exactement la moitié ; par conséquent  $H = \mathcal{S}$  et en particulier leurs ordres sont égaux à la moitié de l'ordre de  $G$ .

Résumons ces derniers arguments avec un point de vue plus actuel. L'action de  $G$  sur les quarante-cinq termes de  $\varphi$  donne un isomorphisme

$$\Phi : G \subset \mathfrak{S}_{27} \xrightarrow{\sim} G_1 \subset \mathfrak{S}_{45}.$$

Le sous-groupe  $\mathcal{S}_1 = G_1 \cap \mathfrak{A}_{45}$  est distingu e dans  $G_1$  car  $\mathfrak{A}_{45}$  l'est dans  $\mathfrak{S}_{45}$ . Le sous-groupe  $\mathcal{S} \stackrel{\text{déf.}}{=} \Phi^{-1}(\mathcal{S}_1)$  est donc distingu e dans  $G$ . On vérifie que  $\Phi(A), \Phi(B), \dots, \Phi(E) \in \mathcal{S}_1$ , ce qui implique que  $H$ , engendr e par  $A, \dots, E$ , est inclus dans  $\mathcal{S}$ . De plus, comme  $\Phi(F) \notin \mathcal{S}_1$ ,  $F \notin \mathcal{S}$  et donc  $(G : \mathcal{S}) \geq 2$ , ce qui donne  $\text{Card } \mathcal{S} \leq \frac{1}{2} \text{Card } G$ . Mais  $\text{Card } \mathcal{S} \geq \text{Card } H \geq 28 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 12 = \frac{1}{2} \text{Card } G$ . Il vient donc  $\text{Card } \mathcal{S} = \text{Card } H = \frac{1}{2} \text{Card } G$  et  $\mathcal{S} = H$ .

Jordan détermine ensuite les facteurs de composition de  $G$ . Par construction de  $H$ , ceux-ci sont 2 ainsi que les facteurs de composition de  $H$ . Jordan montre alors que le groupe  $H$  est simple. Pour cette simplicité, nous nous contentons d'indiquer les idées de la démonstration de Jordan. Dans le *Traite*, ce dernier renvoie en fait à des paragraphes antérieurs où une situation analogue est traitée ; dans l'article

59. Nous avons v erifi e chacun des points  enonc es ici, chaque fois dans un cas particulier. Par exemple, on peut voir que  $a$  peut être envoy e sur  $b$  par la substitution  $BA^2D^2BE^2DA$  ; que  $b$  peut être envoy e sur  $c$  par  $BD^2EB^2$  ; que  $d$  peut être envoy e sur  $e$  par  $C^2ED^2C$  ; que  $(m, p)$  peut être envoy e sur  $(p, t)$  par  $D^2ED$ .

60. En termes modernes :  $G$  est engendr e par les substitutions  $A, B, C, D, E$  et  $F$ .

61. En termes modernes :  $H$  est distingu e dans  $G$ .

62. Vérifions-le pour  $A$ . à partir de l'écriture de  $A$  donnée à la note 58, on obtient facilement la décomposition de  $A$  en cycles :

$$A = (1\ 6\ 9)(2\ 38\ 43)(3\ 22\ 25)(4\ 30\ 33)(5\ 14\ 21)(10\ 18\ 39)(11\ 34\ 29)(12\ 26\ 36) \\ (13\ 42\ 17)(15\ 37\ 45)(16\ 28\ 44)(19\ 40\ 27)(20\ 41\ 35),$$

qui montre que  $A$  est effectivement une permutation paire.

du *Journal de Liouville*, la preuve est donnée intégralement. L'idée est la suivante : si  $I$  est un groupe (différent de  $\{1\}$ ) contenu dans  $H$  et permutable à toutes ses substitutions, Jordan montre que  $I$  contient

- 1° une substitution qui fixe  $a$ ,
- 2° une substitution qui fixe  $a$  et  $b$ ,
- 3° une substitution qui fixe  $a$ ,  $b$  et  $d$ ,
- 4° la substitution  $E$ ,
- 5° les substitutions  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$ .

Donnons en termes modernes les grandes lignes de la preuve du point 1° ; celles des autres points sont du même acabit. Soit  $S \in I \setminus \{1\}$  qui envoie  $a$  sur, par exemple,  $b$ . Si parmi  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , il y en a une, disons  $T$ , qui ne commute pas avec  $S$ , alors  $I$  contient  $S^{-1} \cdot T^{-1} S T \neq 1$  qui envoie  $a$  sur lui-même : c'est gagné. Sinon,  $S$  permute entre elles les racines  $a$ ,  $b$ ,  $c$  d'une part et les racines  $m$ ,  $n$  d'autre part. Donc, si  $S$  ne fixe aucune racine, elle permute circulairement  $a$ ,  $b$ ,  $c$  d'une part et  $m$ ,  $n$  d'autre part. En particulier,  $S^2 \neq 1$  et  $S^2$  fixe  $m$  et  $n$ . Or, il existe  $\Sigma \in H$  telle que  $S m = a$ . Alors  $I$  contient  $\Sigma^{-1} S^2 \Sigma$  qui fixe  $a$ .

Comme  $H$  est dérivé de cinq substitutions  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , le point 5° implique que  $I$  est égal à  $H$  et donc que  $H$  est simple. À l'issue des indications de cette preuve, Jordan précise dans le *Traité* :

« Nous nous bornons à indiquer ce procédé direct de démonstration, la proposition à établir devant se retrouver plus loin (504). »

Le numéro auquel Jordan fait référence est celui qui conclut son travail sur les équations liées aux fonctions hyperelliptiques. Il y montre d'une part que le groupe de l'équation de la trisection des périodes de ces fonctions est égal au groupe abélien  $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_3) \rtimes \mathbf{F}_3^*$  (cf. note 48), et d'autre part qu'il est identique, après adjonction d'une racine carrée, à celui de l'équation aux vingt-sept droites,  $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_3)$ . Or, il a également montré lors de son étude générale du groupe abélien que le groupe (en termes et notation modernes)  $\mathrm{PSP}_4(\mathbf{F}_3) = \mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_3)/\{\pm I_4\}$  est simple<sup>63</sup> : mais ce dernier est justement le groupe  $H$  dont il est question ici.

Résumons : pour le moment, Jordan a montré que le groupe  $G$  de la fonction  $\varphi$  est d'ordre  $27 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 24 (= 51\,840)$ , qu'il possède un sous-groupe  $H$  d'indice 2 qui est simple, et donc que les facteurs de composition de  $G$  sont 2 et  $\frac{\mathrm{Card} G}{2}$ .

**2.3. Réduites géométriques de l'équation aux vingt-sept droites.** Le reste du paragraphe sur l'équation aux vingt-sept droites est consacré à la recherche de réduites de cette équation. Jordan commence par donner « plusieurs réduites remarquables, signalées par divers géomètres ». Pour la première de ces réduites, il explique :

« Prenons, par exemple, pour inconnue de la question le plan<sup>64</sup> du triangle formé par trois droites qui se coupent : ces triangles étant au nombre de quarante-cinq, on aura une équation du quarante-cinquième degré, équivalente à la proposée ». [34, p. 319]

De façon analogue, Jordan donne deux autres réduites, l'une de degré 40 correspondant aux triplets de doubles trièdres, l'autre de degré 36 correspondant aux doubles-six (voir nos rappels en 1.1). Pour fixer les idées, citons encore Jordan pour le cas des doubles-six :

« On peut déterminer de  $\frac{27 \cdot 16}{2}$  manières différentes une paire de droites qui ne se coupent pas. On peut d'ailleurs grouper ces paires

63. [34, p. 176].

64. Rappelons qu'un tel plan est appelé *plan tangent triple* par Cayley et Salmon en particulier. Voir [5].

six à six (*doubles-six* de Schläfli), de sorte que les droites d’une paire rencontrent chacune une droite de chaque autre paire du double-six.

Les doubles-six dépendent donc d’une équation du degré  $\frac{27 \cdot 16}{2 \cdot 6} = 36$ , qui sera encore équivalente à la proposée. » [34, p. 319]

La lecture de ces lignes, que Jordan n’explique pas d’avantage, soulève deux questions. D’abord, quelles sont ces équations dont dépendent les plans des triangles, les triplets de doubles trièdres et les doubles-six? Ensuite, d’où provient leur équivalence annoncée avec l’équation aux vingt-sept droites? Nous avons vu que Jordan a pris soin d’expliquer le processus de formation des équations aux vingt-sept droites, aux neuf points d’inflexion, etc. : l’inconnue de l’équation — obtenue par élimination —  tait un paramètre représentant une droite, un point, etc. Ici, s’il est encore possible de former de telle sorte une équation donnant les 45 plans, il semble plus difficile de former celle des 36 doubles-six, puisqu’un double-six est défini par des relations d’incidence *et de non incidence*.

La façon qu’a Jordan de formuler ses affirmations laisse plutôt supposer que l’équation des 45 plans (par exemple) est une équation abstraite de degré 45, dont les racines sont des symboles représentant chaque plan et soumis à des relations traduisant les relations d’incidence particulières connues entre ces plans. L’équivalence entre cette équation et celle des vingt-sept droites proviendrait alors du fait que la connaissance des vingt-sept droites et de leurs relations d’incidence entraîne celle des plans, et que réciproquement, la connaissance des plans et de leurs relations d’incidence entraîne celle des vingt-sept droites : les 45 plans se coupent cinq à cinq suivant une des droites de la surface cubique.

Cette interprétation s’applique aussi aux cas des trièdres et des doubles-six, car on peut retrouver une à une chacune des vingt-sept droites par un jeu d’intersection des trièdres ou des doubles-six entre eux. En outre, la phrase de Jordan que nous avons déjà citée en partie :

« L’équation aux vingt-sept droites a plusieurs réduites remarquables, signalées par divers géomètres » [34, p. 319]

semble maintenant confirmer nos propos. En effet, d’après la littérature secondaire<sup>65</sup>, Jordan est le premier à s’intéresser à l’équation aux vingt-sept droites, et en particulier, personne avant lui n’en a donn e de réduite. C’est donc que la connaissance géométrique de configurations particulières (triangles, trièdres, doubles-six) donne, de façon en quelque sorte automatique, des réduites de degré correspondant au nombre d’objets constituant ces configurations.

Cette vision des choses tranche assez franchement avec le reste du *Traite*. Sachant l’influence de Clebsch sur l’écriture du chapitre des applications géométriques, il est plus que tentant de voir les « libérales communications » (cf. note 44) de celui-ci en filigrane. De fait, ce type de raisonnement se retrouve dans plusieurs travaux de Clebsch, où l’existence de groupements de droites implique sans détour l’existence de certaines réduites. Par exemple, dans le cas des seize droites d’une surface quartique   conique double dont nous reparlerons dans la suite, Clebsch montre qu’il y a 5 manières de les regrouper deux à deux (selon certaines propriétes d’incidence) et en déduit immédiatement l’existence d’une réduite de degré 5 pour l’équation aux seize droites<sup>66</sup>. Ce raisonnement bas e sur une connaissance de la situation géométrique sous-jacente à l’équation étudiée coïncide donc avec celle à l’oeuvre dans les lignes de Jordan.

Ce dernier la réutilise *a contrario* dans la suite du *Traite* :

« Aucune réduite d’un degré inférieur au vingt-septième n’ayant été rencontrée jusqu’ici, on était fond e à penser qu’il est impossible de

65. [28, 48].

66. Voir [9, p. 19].

ramener la résolution de l'équation aux vingt-sept droites à celle d'une équation d'un degré inférieur. Nous allons en effet prouver cette proposition. » [34, p. 319]

Ainsi, Jordan utilise à nouveau les connaissances géométriques connues pour avancer dans son étude de l'équation aux vingt-sept droites ; mais cette fois, c'est en se basant sur le fait qu'aucune configuration de moins de vingt-sept objets formés à partir des vingt-sept droites n'a été mise à jour qu'il conjecture la non existence de réduite de degré inférieur à 27. Comme nous allons le voir à présent, il confirme cela avec une preuve fondée sur des considérations d'équations et de substitutions, et totalement exemptée de géométrie.

**2.4. Il n'existe pas de réduite de degré inférieur à 27.** Pour montrer que l'équation aux vingt-sept droites ne possède pas de réduite de degré strictement inférieur à 27, Jordan commence par faire remarquer que si un tel abaissement avait lieu, il aurait lieu aussi après avoir adjoint la racine carrée réduisant le groupe  $G$  à  $H$ <sup>67</sup>. Il suppose que cette adjonction est faite et cherche quels sont les degrés possibles pour l'équation réduite.

Jordan note  $E_{27}$  l'équation aux vingt-sept droites et  $E_d$  une équation équivalente à  $E_{27}$ , de degré  $d$  minimal parmi celles-ci. Il montre par l'absurde que  $E_d$  est irréductible et primitive : si  $E_d$  n'était pas irréductible, la résolution d'un de ses facteurs (de degré inférieur à  $d$ ) abaisserait le groupe de  $E_{27}$ . Mais comme  $H$ , groupe de  $E_{27}$ , est simple, la résolution d'un tel facteur entraînerait la résolution complète de  $E_{27}$  d'après le COROLLAIRE que nous avons rappelé à la section 1.2. Comme réciproquement, toutes les racines de  $E_d$ , donc celles de ses facteurs irréductibles, sont des fonctions rationnelles de celles de  $E_{27}$ , cela implique que  $E_{27}$  est équivalente à un facteur de  $E_d$ , ce qui contredit la minimalité de  $d$ .

Si d'autre part l'équation  $E_d$  n'était pas primitive, ses racines se regroupaient en systèmes « dépendant d'une équation dont le degré divise  $d$  ». La résolution de cette équation abaisserait le groupe de  $E_{27}$ <sup>68</sup> et donc entraînerait comme *supra* la résolution de  $E_{27}$ , contredisant à nouveau la minimalité de  $d$ .

Jordan note alors  $G_d$  l'ordre<sup>69</sup> de  $E_d$  : puisque  $E_d$  et  $E_{27}$  sont équivalentes,  $G_d$  est égal à l'ordre de  $E_{27}$ , qui est  $\Omega = 27 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 2$ . En outre,  $G_d$  est divisible par  $d$  et divise<sup>70</sup>  $1 \cdot 2 \dots d$ . Jordan en conclut que si  $d < 27$ , alors  $d$  est l'un des nombres 24, 20, 18, 16, 15, 12, 10 et 9. Il écarte ensuite ces différentes possibilités au fur et à mesure, au cours de longs développements. Nous ne donnons ici que la preuve que le cas  $d = 24$  est impossible. D'une part, comme Jordan l'écrit, il s'adapte aux cas  $d = 18$  et  $d = 12$ , et d'autre part, il est représentatif de l'esprit des autres cas. La démonstration de Jordan devenant ici très elliptique, nous choisissons d'intervenir ligne par ligne pour donner des compléments et des explications en termes modernes. Nous introduisons également une numérotation afin de rendre plus aisée la lecture de ce qui suit.

(1) Jordan suppose l'existence d'une réduite  $E_{24}$  de degré 24. « Adjoignons à l'équation  $E_{24}$  une de ses racines,  $x$  : l'équation  $E_{23}$  qui détermine les vingt-trois

67. Rappelons en effet que l'indice de  $H$  dans  $G$  est 2. Donc, si  $K$  désigne un corps de décomposition de l'équation aux vingt-sept droites, et si  $k'$  désigne la sous-extension de  $K/k$  telle que  $\text{Gal}(K/k') = H$ , on a  $[k' : k] = 2$ . C'est justement dire qu'il existe un élément  $\delta$  de degré 2 sur  $k$  (la « racine carrée ») tel que  $k' = k(\delta)$ .

68. Il s'agit d'un théorème général sur la résolution des équations non primitives. Voir par exemple [35, p. 31].

69. Nous adoptons la terminologie de Jordan qui désigne par « ordre d'une équation » l'ordre de son groupe.

70. Le fait que  $G_d$  divise  $d!$  vient du fait que  $G_d$  est un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_d$ . Le fait que  $G_d$  soit divisible par  $d$  s'explique de la façon suivante : si on note  $x_1, \dots, x_d$  les racines de  $E_d$ , alors  $G_d = [k(x_1, \dots, x_d) : k]$ . Mais  $[k(x_1, \dots, x_d) : k] = [k(x_1, \dots, x_d) : k(x_1)][k(x_1) : k]$ , et comme  $E_d$  est irréductible,  $k(x_1) \simeq k[X]/(E_d)$  est de degré  $d$  sur  $k$ .

racines restantes a son groupe  $G_{23}$  form e des substitutions qui laissent  $x$  immobile, et son ordre est égal à  $\Omega/24$ , nombre divisible par les nombres premiers 2, 3, [5]<sup>71</sup>. »

Par correspondance de Galois, le groupe  $G_{23}$  de  $E_{23}$  est effectivement le stabilisateur  $\text{Stab}_{G_{24}}(x)$  de  $x$  sous  $G_{24}$ . De plus, comme  $E_{24}$  est irréductible, son groupe  $G_{24}$  est transitif d'après le THÉORÈME II que nous avons rappelé en section 1.2. Par conséquent, l'orbite  $G_{24} \cdot x$  est de cardinal maximal, c'est-à-dire 24. Ainsi,

$$\#G_{23} = \# \text{Stab}_{G_{24}}(x) = \frac{\#G_{24}}{\#G_{24} \cdot x} = \frac{\Omega}{24}.$$

Le nombre  $\Omega/24$  est bien divisible par 2, 3 et 5; ce sont d'ailleurs ses seuls facteurs premiers.

- (2) « Les équations irréductibles dont elle est le produit ont donc leur ordre divisible par ces trois nombres premiers, à l'exclusion de tous les autres (397). »

Le théorème donn e au numéro 397 du *Traité* dit en effet que si  $\mathcal{E}$  est une équation irréductible et primitive de degré  $n$  et  $E$  une équation de degré  $n - 1$  obtenue en adjoignant à  $\mathcal{E}$  une de ses racines, tout nombre premier qui divise l'ordre de  $E$  divise l'ordre de chacune de ses équations partielles (c'est-à-dire de ses facteurs). Appliqu e ici, cela implique que l'ordre des facteurs irréductibles de  $E_{23}$  est divisible par 2, 3 et 5. Réciproquement, tout diviseur de l'ordre d'une équation partielle divise l'ordre de l'équation car le groupe de l'équation partielle est un sous-groupe de celui de l'équation « globale ». Ici, 2, 3 et 5 sont les seuls diviseurs premiers de  $\Omega/24$ , ce qui permet à Jordan d'exclure des diviseurs des ordres des équations partielles les nombres premiers autres que 2, 3 et 5.

- (3) « Donc chacune de ces équations est du degré 5 au moins; en outre, aucune d'elles n'a pour degré 7, 8 ou 9, car son ordre ne pourrait être divisible par 5 sans l'être par 7 (398). »

Le théorème donn e au numéro 398 dit que si une équation irréductible  $E$  de degré  $n$  a son ordre divisible par un nombre premier  $p$  supérieur à  $n/2$ , son groupe sera  $n - p + 1$  fois transitif. Dans la situation présente, supposons par exemple qu'un facteur irréductible soit de degré 8 et notons-en  $x_1, \dots, x_8$  les racines. Par le théorème 398 appliqu e avec  $n = 8$  et  $p = 5$ , son groupe  $\Gamma$  est 3 fois transitif. Notons  $\text{Stab}_{\Gamma}(x_1, x_2) = \{g \in \Gamma, gx_1 = x_1 \text{ et } gx_2 = x_2\}$ . Ce groupe s'interprète comme le stabilisateur de  $x_2$  sous  $\text{Stab}_{\Gamma}(x_1)$ , donc

$$\# \text{Stab}_{\Gamma}(x_1, x_2) = \frac{\# \text{Stab}_{\Gamma}(x_1)}{\# \text{Stab}_{\Gamma}(x_1) \cdot x_2}.$$

Mais  $\text{Stab}_{\Gamma}(x_1) \cdot x_2$  est de cardinal 7 car, comme  $G$  est 3 fois donc 2 fois transitif, on peut envoyer  $(x_1, x_2)$  sur n'importe quel couple  $(x_1, \xi)$  avec  $\xi \in \{x_2, \dots, x_8\}$ . Donc

$$\# \text{Stab}_{\Gamma}(x_1, x_2) = \frac{1}{7} \# \text{Stab}_{\Gamma}(x_1) = \frac{1}{7} \cdot \frac{\#\Gamma}{8},$$

la dernière égalité provenant comme au point 1 de la transitivité de  $\Gamma$ . De cela suit que  $\#\Gamma$  est divisible par 7.

- (4) « Enfin, aucune d'elles n'a son degré divisible par un nombre premier autre que 2, 3, 5, car ce nombre premier diviserait son ordre. »

En effet, comme le degré d'une équation divise son ordre (voir la note 70), tout diviseur premier du degré divise également l'ordre de l'équation.

71. Coquille dans le *Traité*, où il est écrit « 2, 3, 4 ».

- (5) « D'après cela, les seules hypothèses admissibles pour les degrés de ces facteurs irréductibles sont les suivantes : 18 et 5 ; 12, 6 et 5 ; 6, 6, 6, et 5. »

On énumère les possibilités : on cherche les degrés sous la forme  $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$  et leur somme doit être égale à 23. Parmi les nombres de la forme annoncée, ceux qui sont inférieurs à 23 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18 et 20. On exclut déjà 1, 2, 3, 4, 8 et 9 vu le point 3. Faire la liste des partitions de 23 avec les nombres de la liste restants donne ce que Jordan annonce.

- (6) Jordan montre que la première hypothèse est impossible, les mêmes raisonnements montrant que les autres hypothèses le sont tout autant : « Supposons que  $E_{23}$  soit le produit de deux facteurs  $E_{18}$  et  $E_5$  ayant respectivement pour racines  $y_1, \dots, y_{18}$  et  $x_1, \dots, x_5$ . L'ordre du groupe partiel  $\Gamma^{(\mu)}$  formé par les substitutions de  $G_{24}$  qui laissent immobiles  $x$  et  $x_\mu$  sera  $\frac{\Omega}{24 \cdot 5}$  et celui du groupe partiel  $\Delta^{(\nu)}$  formé par celles des substitutions qui laissent immobiles  $x$  et  $y_\nu$  sera  $\frac{\Omega}{24 \cdot 18}$ . »

Il est bon de commencer par rappeler le fait suivant (qui apparaît un peu caché dans le numéro 357 du *Traité*) : soit  $F$  un facteur d'une équation  $E$ . Alors tout élément du groupe de Galois de  $E$  induit une permutation des racines de  $F$ . Donc ici, les racines  $x_1, \dots, x_5$  sont permutées entre elles, de même que les racines  $y_1, \dots, y_{18}$ . Comme  $E_5$  est irréductible, l'action induite est transitive et on en déduit comme au point 3 que

$$\#\Gamma^{(\mu)} = \frac{\#\text{Stab}_{G_{24}}(x)}{\#\text{Stab}_{G_{24}}(x) \cdot x_\mu} = \frac{\Omega/24}{5}.$$

De même pour  $\#\Delta^{(\nu)}$ .

- (7) « Soit maintenant  $S$  une substitution de  $G_{24}$ , qui remplace  $x$  par  $x_\mu$ , et soient  $z$  une autre racine quelconque de  $E_{24}$ ,  $u$  la racine que  $S$  lui fait succéder. Le groupe formé par les substitutions qui laissent  $x_\mu$  et  $u$  immobiles est le transformé par  $S$  de celui dont les substitutions laissent  $x$  et  $z$  immobiles ; il contiendra donc  $\frac{\Omega}{24 \cdot 5}$  ou  $\frac{\Omega}{24 \cdot 18}$  substitutions, suivant que  $z$  sera l'une des racines  $x_1, \dots, x_5$  ou l'une des racines  $y_1, \dots, y_{18}$ . »

Par définition, le transformé de  $\text{Stab}(x, z)$  par  $S$  est le groupe  $S \cdot \text{Stab}(x, z) \cdot S^{-1}$  (voir [34, p. 24] ; à remarquer que Jordan note la composition de deux substitutions dans l'ordre inverse de celui que nous avons l'habitude d'utiliser de nos jours). Ces assertions de Jordan dont il est question ici ne posent pas de difficulté.

- (8) « Or l'équation  $E_5$  ayant son ordre divisible par 3, son groupe est trois fois transitif (398) ; donc le groupe formé par celles des substitutions de  $G_{23}$  qui laissent immobiles deux quelconques de ses racines  $x_\mu$  et  $x_{\mu'}$ , a pour ordre  $\frac{\Omega}{24 \cdot 5 \cdot 4}$ . »

La démonstration est la même qu'au point 3, où a d'ailleurs été rappelé le théorème du n° 398.

- (9) « Le groupe formé par celles des substitutions de  $G_{24}$  qui jouissent de cette propriété, contenant celui-là, a pour ordre un multiple de ce nombre ; donc il ne peut avoir pour ordre  $\frac{\Omega}{24 \cdot 18}$  ; donc les cinq racines telles, que le groupe partiel formé par celles des substitutions de  $G_{24}$  qui laissent immobiles l'une d'elles en même temps que  $x_\mu$  ait pour ordre  $\frac{\Omega}{24 \cdot 5}$ , sont  $x, x_1, \dots, x_{\mu-1}, x_{\mu+1}, \dots$ . Mais  $S$  les fait succéder aux cinq racines  $x_1, \dots, x_5$ , qui jouissent de la même

propriété par rapport à  $x$ . Donc  $S$  permute exclusivement entre elles les six racines  $x, x_1, \dots, x_5$  ».

D'après le point 6, on a  $\# \text{Stab}(x_\mu, x) = \frac{\Omega}{24 \cdot 5}$ . Ensuite, d'après le point 7,

$$\# \text{Stab}(x_\mu, x_{\mu'}) = \begin{cases} \Omega/(24 \cdot 5) & \text{si } S^{-1}x_{\mu'} \in \{x_1, \dots, x_5\} \\ \Omega/(24 \cdot 18) & \text{si } S^{-1}x_{\mu'} \in \{y_1, \dots, y_{18}\}. \end{cases}$$

D'après le début de ce point 9, le second cas est exclu, et donc  $\# \text{Stab}(x_\mu, x_{\mu'}) = \frac{\Omega}{24 \cdot 5}$  et  $S^{-1}x_{\mu'} \in \{x_1, \dots, x_5\}$ . Ce dernier fait, joint à l'égalité  $Sx = x_\mu$ , montre alors que  $S$  permute entre elles  $x, x_1, \dots, x_\mu$ . Par conséquent, on a nécessairement  $S^{-1}y_\nu \in \{y_1, \dots, y_{18}\}$  pour tout  $\nu$  et donc  $\# \text{Stab}(x_\mu, y_\nu) = \frac{\Omega}{24 \cdot 18}$ , ce qui finit de prouver ce que Jordan annonce.

- (10) « D'où l'on [déduit] comme au n o 396, que  $E_{24}$  n'est pas primitive, ce qui est contraire au numéro précédent. »

Donnons les grandes lignes de la preuve du n o 396, qui s'adapte telle quelle à la situation présente. Si une substitution de  $G_{24}$  envoie une des racines  $x, x_1, \dots, x_5$  sur une autre de cet ensemble, alors elle permute ces six racines exclusivement entre elles. Soit  $y \in \{y_1, \dots, y_{18}\}$  et  $U \in G_{24}$  telle que  $Ux = y$ . Alors  $y = Ux, \eta_1 = Ux_1, \dots, \eta_5 = Ux_5$  sont toutes différentes de  $x, x_1, \dots, x_5$  et toute substitution envoyant une des racines du premier ensemble sur une racine du second ensemble envoie *toutes* les racines du premier ensemble sur celles du second. On obtient de même un troisième ensemble de six racines  $\eta', \eta'_1, \dots, \eta'_5$ . Cette partition des racines de  $E_{24}$  en trois ensembles montre que  $E_{24}$  n'est pas primitive.

Jordan a ainsi prouv e que l'équation aux vingt-sept droites ne possède pas de réduite de degré  $d = 24$ . Avec le même genre de techniques, il montre que les autres possibilités pour  $d$  mènent à des contradictions. Comme l'écrit Jean Dieudonné, cette démonstration est une « longue et délicate analyse »<sup>72</sup>; c'est d'ailleurs la plus longue de toutes celles des « Applications Géométriques » du *Traité*.

Cette impossibilité d'« abaissement » de l'équation aux vingt-sept droites conclut l'article du *Journal de Liouville*, mais la section du *Traité* sur les droites des surfaces cubiques contient encore un paragraphe concernant l'adjonction à cette équation d'une de ses racines. Ce paragraphe consiste en l' enonc e du résultat liant le problème des vingt-sept droites à celui des seize droites. Nous le regarderons un peu plus tard, conjointement à celui liant les vingt-sept droites aux vingt-huit tangentes doubles. Auparavant, nous allons voir que la lecture des commentaires concernant ces résultats nous renseigne déjà sur l'articulation entre théorie des substitutions et géométrie que nous tenons à analyser.

### 3. DES VINGT-SEPT DROITES AUX SEIZE DROITES ET AUX VINGT-HUIT TANGENTES DOUBLES

à la fin de sa Note « Sur les équations de la géométrie », Jordan écrit que si l'on adjoint à l'équation aux vingt-huit tangentes doubles une de ses racines, on obtient une équation de degré 27 ayant le même groupe que l'équation aux vingt-sept droites; puis que si l'on adjoint à cette dernière une de ses racines, l'équation obtenue se décompose en une équation de degré 10 et une autre de degré 16, ayant même groupe que l'équation aux seize droites.

La réduction de l'équation aux vingt-huit tangentes doubles à celle des vingt-sept droites est faite dans le paragraphe VI du *Traité des substitutions*. Jordan y commente son résultat :

72. [36, p. xxiii].

« Ainsi se retrouve entre le problème des vingt-sept droites et celui des doubles tangentes, le lien remarquable signalé par M. Geiser. » [34, p. 330]

Le lecteur est alors renvoyé à un article de Geiser<sup>73</sup>, consacré aux vingt-huit tangentes doubles des quartiques planes. Cet article est également cité dans la Note « Sur les équations de la géométrie », à l'issue de la remarque suivante :

« La théorie des substitutions aurait donc permis de prévoir l'existence des liaisons géométriques qui existent entre les problèmes des vingt-huit doubles tangentes, des vingt-sept droites et des seize droites ». [33]

Concernant les seize droites, Jordan écrit de même dans sa Notice destinée à sa candidature à l'Académie des Sciences :

« [L'équation des vingt-sept droites] est intimement liée à l'équation des seize droites. Ce dernier résultat, que la théorie m'avait fait prévoir, a été vérifié par M. Geiser. » [35, p. 32]

Et l'article de Geiser consacré aux surfaces quartiques à conique double et leur seize droites<sup>74</sup>, est introduit comme suit :

« La relation vue dans le mémoire "Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades" entre les droites des surfaces du troisième degré et les tangentes doubles des courbes planes du quatrième degré a incité Monsieur *Camille Jordan* à effectuer des recherches algébriques, lesquelles, comme ce dernier l'a brièvement partagé avec l'auteur, font voir un rapport entre les droites d'une surface générale du troisième degré et les droites d'une surface du quatrième degré avec courbe plane double du second degré. En effet, les considérations géométriques suivantes confirment les suppositions annoncées par Monsieur *Jordan*<sup>75</sup>. » [22].

Tous les propos rapportés ici mettent en lumière une relation complexe entre théorie des substitutions et géométrie.

On voit en effet que Jordan et Geiser ont tendance à bien démarquer leurs approches respectives : d'une part les travaux algébriques de Jordan, et d'autre part les travaux géométriques de Geiser. La séparation entre les approches est donc nette, mais elle n'empêche pas un enrichissement mutuel de chacune par l'autre, puisque les découvertes de Geiser sur les liens entre les tangentes doubles et les vingt-sept droites inspirent à Jordan ses travaux sur les équations, qui eux-mêmes font faire à Geiser ses travaux sur les seize droites.

La démarcation entre théorie des substitutions et géométrie se lit également dans les mots employés par ces deux protagonistes. Du côté de l'algèbre, Jordan écrit que c'est une « théorie » permettant de « prévoir » des résultats et Geiser parle des « suppositions annoncées par Monsieur *Jordan* ». De l'autre côté, les considérations géométriques permettent, selon les deux auteurs, de « vérifier » ou de « confirmer »<sup>76</sup> ce qui a été vu par l'algèbre. La situation n'est donc pas symétrique entre les deux disciplines : la théorie des substitutions semble être d'avantage un moyen de deviner

73. [21].

74. [22].

75. Die in dem Aufsatz : "Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades" [21] nachgewiesene Beziehung zwischen den Geraden der Fläche dritten Grades und die Doppeltangenten der Curve vierten Grades haben Herrn *Camille Jordan* zu algebraischen Untersuchungen veranlasst [33], die, wie er dem Verfasser brieflich mittheilte, einen Zusammenhang erkennen lassen zwischen den Geraden einer allgemeiner Fläche dritten Grades und den Geraden einer Fläche vierten Grades, welche eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades hat. In der That bestätigen die nachfolgenden geometrischen Betrachtungen die von Herrn *Jordan* ausgesprochene Vermuthung. »

76. À la fin de [22], Geiser emploie à nouveau le même vocabulaire : « [... dieser Aufsatz], dessen Grundgedanke in der Bestätigung der von Herrn *Jordan* ausgesprochene Vermuthung liegt. »

des résultats géométriques (ici, les liens entre les trois configurations de droites), résultats devant être prouv es par la géométrie. D'ailleurs, l'emploi du conditionnel pass e dans la deuxième des citations de Jordan que nous avons rapportées dans cette section laisse entendre que Jordan accorde une potentialité d'anticipation de la théorie des substitutions, au moins face à la géométrie. S'il semble un peu risqu e d'extrapoler à partir de ces quelques phrases un point de vue général de Jordan et de Geiser sur une quelconque hiérarchie entre algèbre et géométrie, nul doute que ces champs lexicaux particuliers mettent en évidence une réelle différence de statut entre théorie des substitutions et géométrie.

Avant d'aller plus en avant sur ce terrain, il nous semble utile de regarder en détails les travaux de Jordan et de Geiser dont il est question ici, afin de se rendre compte de façon plus précise ce que Geiser appelle « recherches algébriques » et « considérations géométriques ».

**3.1. Les « recherches algébriques » de Jordan.** Nous regardons donc ici l'approche de Jordan concernant la lien entre les vingt-huit tangentes doubles, les vingt-sept droites et les seize droites. Nous revenons au *Traite*, et plus spécifiquement au chapitre des applications géométriques.

3.1.1. *Les vingt-huit tangentes doubles.* Rappelons-le, le §VI des « Applications géométriques » du *Traite* est consacr e aux courbes d'ordre  $n - 3$  qui sont tangentes en  $n(n - 3)/2$  points à une courbe  $C$  donnée d'ordre  $n$ . Pour  $n = 4$ , il s'agit des tangentes doubles à une courbe quartique donnée. Contrairement   Jordan, nous nous confinons à ce cas pour les quelques résultats qu'il énonce au début de ce §VI.

Jordan rappelle en citant [7], que l'équation dont dépendent les tangentes doubles est de degré 28. Ses racines peuvent être représentées par le symbole  $(x_1y_1x_2y_2x_3y_3)$ , où  $x_1, \dots, y_3$  valent 0 ou 1 et satisfont la condition

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Citant toujours Clebsch, Jordan énonce le théorème suivant (il le fait dans le cas général d'une courbe de degré  $n$ ; nous l'appliquons directement à  $n = 4$ ) :

« Soit  $\mu$  un entier quelconque tel, que  $\mu/2$  soit entier : les points de contact de  $C$  avec les  $\mu$  courbes correspondantes aux  $\mu$  racines  $(x'_1y'_1 \dots y'_3), \dots, (x_1^{(\mu)}y_1^{(\mu)} \dots y_3^{(\mu)})$  seront sur une même courbe du degré  $\mu/2$ , lorsque les six congruences contenues dans les formules suivantes :

$$x'_\rho + \dots + x_\rho^{(\mu)} \equiv y'_\rho + \dots + y_\rho^{(\mu)} \equiv 0 \pmod{2}$$

sont satisfaites à la fois [c'est-à-dire pour tout  $\rho \in \{1, 2, 3\}$ ]. [34, p. 329]

  nouveau, Jordan introduit une fonction  $\varphi_4$  adéquate; ici, elle est obtenue en sommant tous les systèmes de quatre racines vérifiant les conditions du théorème précédent appliqu e avec  $\mu = 4$ . En notation moderne,

$$\varphi_4 = \sum_{\substack{x_\rho + x'_\rho + x''_\rho + x'''_\rho \equiv 0 \\ y_\rho + y'_\rho + y''_\rho + y'''_\rho \equiv 0 \\ \forall \rho \in \{1, 2, 3\}}} (x_1y_1 \dots y_3)(x'_1y'_1 \dots y'_3)(x''_1y''_1 \dots y''_3)(x'''_1y'''_1 \dots y'''_3).$$

Comme dans les autres situations géométriques, Jordan montre que le groupe de l'équation aux vingt-huit tangentes doubles est inclus dans le groupe  $G$  de la fonction  $\varphi_4$ , et ne dit rien sur l'inclusion réciproque.

Il continue en regardant l'effet de l'adjonction à l'équation aux vingt-huit tangentes doubles d'une de ses racines, par exemple (110000) : les racines restantes sont déterminées par une équation de degré 27 dont le groupe  $H$  est constitu e des

substitutions de  $G$  qui fixent (110000). Ainsi,  $H$  laisse invariante la fonction  $\varphi'_4$  formée des termes de  $\varphi_4$  qui contiennent (110000) en facteur<sup>77</sup>. Une nouvelle fonction  $\psi$  invariable par  $H$  est obtenue en omettant ce facteur ; elle est formée de la somme des produits de trois racines  $(x_1, \dots, y_3), (x'_1, \dots, y'_3), (x''_1, \dots, y''_3)$  telles que<sup>78</sup>

$$x_1 + x'_1 + x''_1 + 1 \equiv y_1 + y'_1 + y''_1 + 1 \equiv x_2 + x'_2 + x''_2 \equiv \dots \equiv y_3 + y'_3 + y''_3 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Jordan écrit alors :

« Cela posé, il est aisé de voir que  $\psi$  contient quarante-cinq termes et ne diffère que par la notation de la fonction  $\varphi$  du n° 441 [celle des vingt-sept droites]. » [34, p. 330]

Cette vérification n'est en effet pas difficile, mais elle est assez fastidieuse. Il s'agit dans un premier temps d'établir la liste de tous les symboles de racines possibles : outre celle qu'on adjoint à l'équation, on en trouve 27 — cela correspond aux vingt-sept droites. On cherche ensuite quelles sont les combinaisons à former pour  $\psi$  — ces combinaisons correspondent aux triangles formés avec les vingt-sept droites. Nous ne détaillons pas tous ces calculs ici. La fonction  $\psi$  est de la forme

$$\psi = (000011)(000111)(110100) + (000011)(001011)(111000) + \dots$$

ce qui va effectivement correspondre à

$$\varphi = abc + ade + \dots$$

Jordan déduit de cette identité entre  $\varphi$  et  $\psi$  que le groupe des vingt-sept tangentes doubles est contenu dans celui des vingt-sept droites<sup>79</sup>.

Pour montrer l'égalité des deux groupes, Jordan montre que leurs ordres sont égaux. En effet, Jordan a étudié dans le *Traité* ce qu'il appelle les « groupes de Steiner », dont le groupe des vingt-huit tangentes doubles est un cas particulier. Le cardinal de ce dernier est<sup>80</sup>

$$\mathcal{R}_3(\mathcal{R}_3 - 1) 2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5,$$

où  $\mathcal{R}_3 = 2^{2 \cdot 3 - 1} - 2^{3 - 1} = 28$ . L'ordre du groupe des vingt-sept tangentes doubles est donc<sup>81</sup>  $\frac{1}{28} \mathcal{R}_3(\mathcal{R}_3 - 1) 2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ , qui est égal à l'ordre du groupe de l'équation aux vingt-sept droites :  $27 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4$ . Finalement, Jordan a montré qu'en adjoignant à l'équation aux tangentes doubles une de ses racines, les vingt-sept racines restantes dépendent d'une équation de degré 27 ayant le même groupe que l'équation aux vingt-sept droites.

Comme nous l'avons déjà écrit, Jordan conclut par ces mots :

« Ainsi se retrouve entre le problème des vingt-sept droites et celui de doubles tangentes, le lien remarquable signalé par M. Geiser (*Mathematische Annalen*, t. I<sup>er</sup>) ».

77. En effet, si  $\sigma \in H$ , alors  $\sigma$  envoie un terme de  $\varphi_4$  sur un terme de  $\varphi_4$  puisque  $\sigma \in G$ . Comme de plus  $\sigma$  fixe la racine (110000), elle envoie un terme de  $\varphi_4$  qui contient (110000) sur un terme de  $\varphi_4$  qui contient (110000). Donc  $\sigma$  laisse  $\varphi'_4$  invariante.

78. Prendre  $(x''_1 y''_1 x''_2 y''_2 x''_3 y''_3) = (110000)$  dans les conditions données précédemment.

79. Le « groupe des vingt-sept droites » est le groupe  $H$ , ou plutôt le groupe  $\hat{H}$  obtenu en restreignant les substitutions de  $H$  à l'ensemble des racines exceptée (110000). Ce groupe est inclus dans le groupe de  $\psi$  par construction et le groupe de  $\psi$  est le même que celui de  $\varphi$  qui « est » le groupe des vingt-sept droites (toujours avec ce problème d'inclusion réciproque : voir la fin de 2.1).

80. Voir [34, p. 330]. Jordan montre par ailleurs que ces groupes de Steiner sont des groupes « abéliens ». Cela montre que le groupe des vingt-huit tangentes doubles est isomorphe au groupe symplectique  $\text{Sp}_6(\mathbf{F}_2)$ .

81. Cela découle de la transitivité du groupe aux vingt-huit tangentes doubles. Petite coquille dans le *Traité*, où il est écrit «  $\frac{1}{28}(\mathcal{R}_3 - 1) 2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$  ».

Notons que ce lien entre les équations aux vingt-sept droites et aux vingt-huit tangentes doubles trouve une application algébrique, puisqu'il permet à Jordan de montrer que l'équation aux vingt-huit tangentes doubles n'a pas de réduite de degré strictement inférieur à 28<sup>82</sup>.

Si on traduit cela avec les interprétations actuelles de ces groupes en groupes symplectiques (voir la fin de la section 2.2 et la note 80), on obtient donc une injection  $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_3) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_6(\mathbf{F}_2)$ . Dieudonné indique quant à lui que « les liens connus entre le problème des 28 tangentes et celui des 27 droites apparaissent [...] comme reflétant l'isomorphisme exceptionnel entre  $\mathrm{PU}_4^+(\mathbf{F}_4)$  et  $\mathrm{PSp}_4(\mathbf{F}_3)$  »<sup>83</sup>.

3.1.2. *Les seize droites des surfaces quartiques   conique double.* Le problème des seize droites des surfaces quartiques   conique double est traité dans le §III des « Applications géométriques ». Avant de voir comment Jordan les relie aux vingt-sept droites des surfaces cubiques, regardons brièvement ce qu'il fait de l'équation aux seize droites. Nous ne donnons ici que ce que nous jugeons utile pour comprendre le lien avec les vingt-sept droites.

Jordan réfère à [9] pour l'expos e des propriétés qui suivent. Une surface quartique possédant une conique double contient seize droites. Il existe cinq cônes, auxquels chacune des seize droites est tangente. Pour chaque cône, les seize droites se répartissent en huit couples de la façon suivante : il y a exactement quatre plans tangents au cône qui coupent la surface quartique en deux coniques dégénérées en paires de droites, qui forment lesdits couples. Les droites peuvent se noter  $1, 2, \dots, 16$ , et ce qui vient d'être dit se résume sur le tableau suivant :

I	2, 6;	3, 7;	4, 8;	5, 9;	1, 16;	10, 15;	11, 14;	12, 13
II	1, 6;	3, 10;	4, 11;	5, 12;	2, 16;	7, 15;	8, 14;	9, 13
III	1, 7;	2, 10;	4, 13;	5, 14;	3, 16;	6, 15;	8, 12;	9, 11
IV	1, 8;	2, 11;	3, 13;	5, 15;	4, 16;	6, 14;	7, 12;	9, 10
V	1, 9;	2, 12;	3, 14;	4, 15;	5, 16;	6, 13;	7, 11;	8, 10

où sur une ligne sont écrites (par couples correspondant chacun à une conique dégénérée) les droites correspondantes à un des cinq cônes, et, toujours sur une ligne donnée, les droites d'un même plan tangent sont écrites à quatre cases d'intervalle. Par exemple, pour le cône I, les droites 2, 6, 1 et 16 sont dans un même plan tangent.

Suivant son mode opératoire, Jordan introduit une fonction  $\varphi$  qui est la somme de tous les produits de racines correspondant au tableau précédent (nous ajoutons l'indice 16 à  $\varphi$  pour la distinguer de la fonction correspondante dans le cas des vingt-sept droites)<sup>84</sup> :

$$\varphi_{16} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 9 + \dots + 5 \cdot 16 + 6 \cdot 13 + 7 \cdot 11 + 8 \cdot 10,$$

et Jordan montre que le groupe de l'équation  $X$  aux seize droites est inclus dans le groupe  $G_{16}$  des substitutions de  $\{1, 2, \dots, 16\}$  qui laissent  $\varphi_{16}$  invariante. Comme dans les autres cas, il ne fait aucune remarque sur l'inclusion réciproque.

Jordan introduit dix « fonctions partielles  $a_1, b_1, \dots, a_5, b_5$  », formées des quatre termes des lignes des deux blocs du tableau précédent. Par exemple,

$$a_1 = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 9 \quad \text{et} \quad b_1 = 1 \cdot 16 + 10 \cdot 15 + 11 \cdot 14 + 12 \cdot 13.$$

82. L'existence de réduite de degré inférieur à 27 est exclue puisque l'équation aux vingt-sept droites n'en n'a pas. Et si une réduite  $E_{27}$  de degré 27 existait, Jordan montre avec des arguments analogues à ceux rencontr es en section 2.4 (points 1 à 5) que l'adjonction d'une racine donnerait une équation  $E_{26}$  dont les facteurs irréductibles auraient des degrés d'une part au moins égaux à 7, et d'autre part compris entre 8 et 14, ce qui est impossible.

83. [36, p. xxiii].

84. Dans l'expression de  $\varphi_{16}$ , « 2 » par exemple est à lire comme étant le symbole de la racine de l'équation aux seize droites correspondant à la droite numérotée 2.

Il note  $Y$  l'équation de degré 10 dont dépendent ces quantités. Jordan introduit également les substitutions

$$\begin{aligned} A &= (2, 1)(10, 7)(11, 8)(12, 9) & A_1 &= (6, 7)(14, 12)(13, 11)(3, 2) \\ A_2 &= (7, 8)(10, 11)(4, 3)(14, 15) & A_3 &= (8, 9)(11, 12)(13, 14)(5, 4) \\ B &= (9, 16)(4, 10)(2, 13)(3, 11)(5, 1)(6, 12)(7, 14)(8, 15) \\ B_1 &= (12, 16)(4, 7)(1, 13)(3, 8)(5, 2)(6, 9)(19, 14)(11, 15) \\ B_2 &= (14, 16)(4, 6)(1, 11)(2, 8)(5, 3)(7, 9)(10, 12)(13, 15) \\ B_3 &= (15, 16)(3, 6)(1, 10)(2, 7)(5, 4)(8, 9)(11, 12)(13, 14) \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (a_1 a_2)(b_1 b_2), & \mathcal{A}_1 &= (a_2 a_3)(b_2 b_3), \\ \mathcal{A}_2 &= (a_3 a_4)(b_3 b_4), & \mathcal{A}_3 &= (a_4 a_5)(b_4 b_5) \\ \mathcal{B} &= (a_1 b_1)(a_5 b_5), & \mathcal{B}_1 &= (a_2 b_2)(a_5 b_5), \\ \mathcal{B}_2 &= (a_3 b_3)(a_5 b_5), & \mathcal{B}_3 &= (a_4 b_4)(a_5 b_5) \end{aligned}$$

dont il montre qu'elles engendrent respectivement le groupe de  $X$  et le groupe de  $Y$ . Enfin, il montre que ces deux groupes sont de même ordre<sup>85</sup>  $16 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ .

Passons maintenant au lien entre les seize droites et les vingt-sept droites. Nous avons laissé en suspend l'analyse du dernier paragraphe de la section sur les surfaces cubiques. Le voici :

« Supposons que l'on s'adjoigne une des racines de l'équation aux vingt-sept droites, telle que  $a$ . Il restera une équation de degré 26, dont le groupe est dérivé des substitutions  $B, C, D, E, F$ . Ce groupe n'étant pas transitif, l'équation se décompose en deux facteurs rationnels, du seizième et du dixième degré. On voit sans peine que ces équations partielles ont les mêmes groupes que les équations  $X$  et  $Y$  du §III ». [34, p. 329]

Jordan ne donne pas de démonstration de ces affirmations. Voyons comment combler les trous. Nous adoptons un vocabulaire moderne tout en essayant de rester dans l'esprit des preuves de Jordan.

Notons  $E_{26}$  l'équation obtenue par adjonction de la racine  $a$ . Son groupe  $G_{26}$  est formé des substitutions de  $G$ , groupe de l'équation aux vingt-sept droites, qui fixent  $a$ . Il contient donc le groupe  $\langle B, C, D, E, F \rangle$  engendré par  $B, C, D, E$  et  $F$ , puisque ces dernières fixent toutes  $a$ . Or  $\#G_{26} = \#G/27$  car  $G$  agit transitivement, et vu ce qui a été fait en 2.2,  $\#\langle B, C, D, E, F \rangle \geq 10 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 2 = \#G/27$ , ce qui montre l'égalité  $G_{26} = \langle B, C, D, E, F \rangle$  annoncée par Jordan.

Pour voir que  $G_{26}$  n'est pas transitif, on peut par exemple chercher quelles sont les orbites de son action sur les vingt-six racines  $b, c, \dots, u'$ . Grâce aux expressions de  $B, C, D, E$  et  $F$ , on obtient aisément deux orbites, formées respectivement de 10 et de 16 éléments :

$$\omega_{10} = \{b, c, d, e, f, g, h, i, k, l\}$$

et

$$\omega_{16} = \{m, n, p, q, r, s, t, u, m', n', p', q', r', s', t', u'\},$$

qui correspondent d'ailleurs respectivement aux droites incidentes à  $a$  et à celles qui ne lui sont pas incidentes. Cela montre que  $G_{26}$  n'est pas transitif. Et si on pose

$$E_{10} = \prod_{\xi \in \omega_{10}} (x - \xi) \text{ et } E_{16} = \prod_{\xi \in \omega_{16}} (x - \xi), \text{ alors on a}$$

$$E_{26} = E_{10}E_{16},$$

et chacun des facteurs  $E_{10}$  et  $E_{16}$ , étant invariant sous l'action de  $G_{26}$ , est bien rationnel. Il reste à voir pourquoi ces facteurs ont mêmes groupes que les équations  $X$  et  $Y$  issues des seize droites.

<sup>85</sup>. Ils sont même isomorphes, puisqu'en plus, les fonctions  $a_1, \dots, b_5$  sont rationnelles en les racines  $1, \dots, 16$ .

Nous nous inspirons de ce que Jordan fait pour les vingt-huit tangentes doubles (voir la section 3.1.1). Introduisons

$$\varphi' = mn + pq + rs + tu + \dots + nt' + um' + rq' + ps',$$

dont les quatre premiers termes correspondent aux paires de droites de  $\omega_{16}$  incidentes à  $b$ , les quatre suivants aux paires de droites de  $\omega_{16}$  incidentes à  $c$ , etc. — utiliser par exemple la liste des quarante-cinq triangles donn e en 2.1 afin de trouver tous les termes de  $\varphi'$ . Le groupe de  $\varphi'$  contient alors le groupe de  $E_{16}$ . En effet, tout élément  $\sigma$  du groupe de  $E_{16}$  provient d'une substitution  $\tilde{\sigma}$  appartenant au groupe de  $E_{26}$ ; autrement dit,  $\tilde{\sigma}$  coïncide avec  $\sigma$  sur  $\{m, n, \dots, u'\}$  et induit une certaine permutation de  $\{b, c, \dots, l\}$ . Regardons par exemple l'image de  $mn$  par  $\sigma$ . Comme  $\tilde{\sigma}$  est dans le groupe de  $E_{26}$ , les trois droites  $\tilde{\sigma}(b)$ ,  $\sigma(m)$  et  $\sigma(n)$  forment un triangle. Comme  $\tilde{\sigma}(b) \in \{b, c, \dots, l\}$ , le produit  $\sigma(m)\sigma(n)$  apparaît dans  $\varphi'$ , par construction même de celle-ci. D'où l'inclusion annonc e.

On remarque alors que les fonctions  $\varphi'$  et  $\varphi_{16}$  sont identiques à la notation près, la correspondance de la notation des racines étant donn e par le tableau suivant :

2, 6;	3, 7;	4, 8;	5, 9;	1, 16;	10, 15;	11, 14;	12, 13
$m, n$	$q, p$	$s, r$	$u, t$	$n', m'$	$q', p'$	$s', r'$	$u', t'$
1, 6;	3, 10;	4, 11;	5, 12;	2, 16;	7, 15;	8, 14;	9, 13
$n', n$	$q, q'$	$s, s'$	$u, u'$	$m, m'$	$p, p'$	$r, r'$	$t, t'$
1, 7;	2, 10;	4, 13;	5, 14;	3, 16;	6, 15;	8, 12;	9, 11
$n', p$	$m, q'$	$s, t'$	$u, r'$	$q, m'$	$n, p'$	$r, u'$	$t, s'$
1, 8;	2, 11;	3, 13;	5, 15;	4, 16;	6, 14;	7, 12;	9, 10
$n', r$	$m, s'$	$q, t'$	$u, p'$	$s, m'$	$n, r'$	$p, n'$	$t, q'$
1, 9;	2, 12;	3, 14;	4, 15;	5, 16;	6, 13;	7, 11;	8, 10
$n', t$	$m, u'$	$q, r'$	$s, p'$	$u, m'$	$n, t'$	$p, s'$	$r, q'$ .

Par conséquent,  $\varphi_{16}$  et  $\varphi'$  ont même groupe et donc le groupe de  $E_{16}$  est inclus dans le groupe de  $\varphi_{16}$ . De même, en introduisant

$$\varphi'' = bc + de + fg + hi + kl,$$

on montre que le groupe de  $E_{10}$  est inclus dans le groupe de  $\varphi_{10} = a_1b_1 + \dots + a_5b_5$ , la correspondance des notations étant cette fois donn e par

$$\begin{array}{cccccccccc} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 & a_4 & b_4 & a_5 & b_5 \\ b & c & d & e & f & g & h & i & k & l. \end{array}$$

Pour montrer l'égalité de ces groupes, on va montrer que toutes les substitutions des groupes de  $\varphi_{10}$  et de  $\varphi_{16}$  se « retrouvent » dans les groupes de  $E_{10}$  et  $E_{16}$  respectivement.

Pour le groupe de  $E_{10}$  par exemple : le groupe de  $\varphi_{10}$  est engendré par les substitutions  $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{B}_3$  décrites précédemment. Prenons  $\mathcal{A} = (a_1 a_2)(b_1 b_2)$ , et définissons en conséquence  $\tilde{\mathcal{A}} = (b d)(c e)$ . On vérifie facilement que cette substitution  $\tilde{\mathcal{A}}$  (sur  $\{b, c, \dots, l\}$ ) provient de la substitution  $BC^2B \in G_{26}$ . De même, on peut vérifier que la substitution  $\tilde{\mathcal{B}} = (b c)(k l)$ , correspondant à  $\mathcal{B}$ , provient de  $BE^2DB^2DE^2$ . Avec des vérifications similaires, on voit que le groupe  $\langle \tilde{\mathcal{A}}, \dots, \tilde{\mathcal{B}}_3 \rangle$  est contenu dans le groupe de  $E_{10}$ . Mais  $\langle \tilde{\mathcal{A}}, \dots, \tilde{\mathcal{B}}_3 \rangle$  est clairement isomorphe à  $\langle \mathcal{A}, \dots, \mathcal{B}_3 \rangle$  qui est le groupe de  $\varphi_{10}$ .

Finalement, le groupe de  $E_{10}$  est égal au groupe de  $\varphi_{10}$ , qui est égal<sup>86</sup> au groupe de l'équation  $Y$ . On montre de même que le groupe de  $E_{16}$  est égal au groupe de l'équation aux seize droites  $X$ .

En résumé, par l'adjonction d'une de ses racines, les vingt-six racines restantes de l'équation aux vingt-sept droites dépendent d'une équation de degré 26 qui se factorise en deux équations de degrés respectifs 16 et 10. Ces deux équations possèdent le même groupe que l'équation aux seize droites. Voilà ce qu'il en est des « recherches algébriques » de Jordan. Comparons à présent avec l'approche de Geiser.

**3.2. Les « considérations géométriques » de Geiser.** Mathématicien suisse, petit-neveu de Jacob Steiner, Carl Friedrich Geiser (1843-1934) a été formé à l'Université de Berlin, où il fut grandement influencé par son grand-oncle, par Karl Weierstraß et par Leopold Kronecker. S'occupant dans ses recherches essentiellement de géométrie algébrique, il a été surtout un professeur et un administrateur zélé de l'E.T.H., au développement duquel il a largement participé. Pour plus de détails sur la vie et l'œuvre de Geiser, consulter [42, 14].

Pour Arnold Emch, auteur d'une nécrologie de Geiser, le lien entre surfaces cubiques et courbes quartiques fait partie des travaux les plus importants de ce dernier. L'article qui traite de ce lien a été publié en 1869 dans le premier numéro des *Mathematische Annalen*, alors que celui sur les surfaces quartiques à conique double est paru la même année dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.

Les deux articles sont classés dans la rubrique « Nouvelle géométrie synthétique » du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*<sup>87</sup>. Peut-être parce que cette géométrie de la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle a en grande partie disparu — en tant que telle du moins — du paysage mathématique actuel, les raisonnements de Geiser sont assez difficiles à suivre, en particulier si l'on essaie de traduire chacun de ses points en termes d'équations. D'ailleurs, dans la préface de son manuel *Einleitung in der synthetische Geometrie*<sup>88</sup>, Geiser parle de vouloir développer la « capacité d'intuition spatiale<sup>89</sup> » des étudiants, ce qui indique sans doute la vision intuitive des choses avec laquelle Geiser travaillait. Afin de rendre la lecture des ses preuves plus aisée, nous conseillons ainsi au lecteur de ne pas penser en termes d'équations et de garder à l'esprit les quelques faits suivants, très fréquemment utilisés — souvent implicitement — par Geiser<sup>90</sup> :

- (1) L'intersection d'une surface algébrique de degré  $n$  avec un plan est une courbe (algébrique plane) de degré  $n$ .
- (2) Deux courbes algébriques planes de degrés  $m$  et  $n$  se coupent en  $mn$  points : c'est le théorème de Bezout.
- (3) Étant donnés les  $n^2$  points d'intersection de courbes planes de degré  $n$ , il existe une infinité de courbes de degré  $n$  passant par ces points d'intersection. La famille formée de toutes ces courbes est appelée un *faisceau de courbes*, et les points d'intersection communs sont appelés les *points-base* du faisceau.

86. Toujours en supposant que le groupe de  $\varphi_{10}$  est exactement le groupe de  $Y$ . Voir la fin de la section 2.1.

87. Le second apparaît également dans la section « Géométrie analytique », à la rubrique « Correspondance, transformation univoque, représentation ». Nous y reviendrons.

88. [20].

89. « Es galt zunächst, unter möglichst geringen Voraussetzungen das räumliche Anschauungsvermögen der Zuhörer auszubilden. » [20, p. III]. Lisant cette phrase, il est difficile de ne pas penser aux discours de Klein sur l'intuition géométrique. Sur ce point, en particulier face au mouvement d'arithmétisation, voir [52].

90. Voir par exemple [57] et [58] pour un point de vue de géométrie analytique ; ou [55] pour un point de vue de géométrie synthétique. Plus spécifiquement, Clebsch donne dans [47, p. 195] un petit aperçu historique pour la notion de faisceau (de courbes, de surfaces). Il attribue notamment la paternité de la notion à Gabriel Lamé et renvoie à [53] et [54].

- (4) Une équation d'une courbe de degré  $n$  contient  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  coefficients, donc  $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$  coefficients indépendants. Ainsi, par  $\frac{n(n+3)}{2}$  points en position générale dans le plan passe une et une seule courbe algébrique de degré  $n$ . Par exemple, 9 (resp. 14) points en position générale d efinisent une unique courbe cubique (resp. quartique)<sup>91</sup>.
- (5) On peut définir un faisceau de courbes de degré  $n$  comme étant l'ensemble (infini) des courbes de degré  $n$  passant par  $r = \frac{n(n+3)}{2} - 1$  points donn es *a priori*, pourvu que ces  $r$  points soient en position convenable. Les  $r$  points sont les points-base du faisceau. Par exemple, on peut définir un faisceau de courbes quartiques à partir de 13 points-base (et alors toutes les quartiques du faisceau passent nécessairement par 3 autres points).
- (6) De façon analogue, une équation de surface cubique contient 20 coefficients, donc 19 coefficients indépendants. Par conséquent, par 19 points de l'espace en position générale passe une unique surface cubique ; par 18 points passent une infinité de surfaces cubiques : c'est un *faisceau de surfaces cubiques*, et les 18 points sont les *points-base* du faisceau.

De plus, Geiser considère des multiplicités de comptage d'objets, par exemple des multiplicités d'intersection. Si la notion de multiplicité semble maîtrisée dans les  enonc es de propriétes, Geiser introduit presque systématiquement des « points infiniment voisins » quand il s'agit de faire des démonstrations<sup>92</sup>. Nous choisissons dans la suite d'omettre le recours à ces points infiniment voisins, dans le but d'alléger un peu les preuves de Geiser.

Enfin, nous donnerons ponctuellement des explications supplémentaires en renvoyant le lecteur à nos propres figures. Soulignons que les articles de Geiser ne contiennent aucune figure ; ils ne sont constitu es que de texte. Voir la figure 3.1, représentative des articles de Geiser.

Les notations que nous utilisons sont celles de Geiser. Ainsi, les lettres utilisées sont en général les initiales du nom (allemand) des objets qu'elles désignent, et les indices, quand il y en a, correspondent au degré de l'objet en question. Par exemple,  $C_n$  désigne une courbe de degré  $n$  et  $F_n$  une surface de degré  $n$ .

3.2.1. *Des tangentes doubles aux vingt-sept droites.* L'article sur les tangentes doubles est divis e en huit sections num erot es en chiffres romains. Les trois premières sections établissent le lien entre les vingt-huit tangentes doubles des courbes quartiques et les vingt-sept droites des surfaces cubiques. Dans les cinq dernières sections, Geiser dérive à partir de ce lien des propriétes des vingt-huit tangentes doubles à partir de propriétes des vingt-sept droites. Comme ces applications ne sont pas ici notre propos, nous n'en dirons pas beaucoup à leur sujet ; nous regarderons tout de même la section V, qui nous permettra de faire le lien entre l'approche de Geiser et celle de Jordan. Voyons à présent les trois premières sections.

Dans la section I, Geiser montre comment, à partir d'une surface cubique, construire une courbe quartique plane, et d'où, dans cette construction, proviennent les tangentes doubles à cette dernière à partir des vingt-sept droites de la surface cubique.

91. Cela peut sembler contradictoire avec le point précédent : c'est le paradoxe de Cramer. Il s'explique par le fait que (par exemple pour les cubiques) les 9 points d'intersection de courbes cubiques ne sont pas en position générale, justement parce qu'ils sont définis par une intersection particulière.

92. Salmon utilise aussi cette notion, mais parle plutôt de « points consécutifs ». Voir par exemple [57, p 35] ou encore [56, p. 258], où la notion est utilisée dans une des preuve de l'existence des vingt-sept droites.

## Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades.

VON DR. GEISER IN ZÜRICH.

### I.

Die Eigenschaften der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Curve vierten Grades lassen sich sehr anschaulich mit den gegenseitigen Beziehungen der 27 Geraden einer Fläche dritten Grades in Zusammenhang bringen.

Sei  $F_3$  eine Fläche dritten Grades ohne Singularitäten,  $p$  ein willkürlich im Raum angenommener Punkt, so ist der von  $p$  aus der  $F_3$  umschriebene Tangentenkegel vom sechsten Grade. Liegt  $p$  auf  $F_3$  selbst, so besteht der Tangentenkegel aus der doppelt gelegten Tangentialebene  $E$  der  $F_3$  in  $p$  und aus einem Kegel vierten Grades  $K_4$ . Sei  $g$  eine der 27 Geraden der  $F_3$ , so schneidet die durch  $p$  und  $g$  gelegte Ebene  $e$ , welche eine Doppeltangentialebene von  $K_4$  ist, aus  $F_3$  neben  $g$  noch einen Kegelschnitt aus, der mit  $g$  zwei Punkte  $(r, s)$  gemein hat. Werden diese Punkte durch gerade Linien mit  $p$  verbunden, so erhält man die beiden Berührungskanten von  $K_4$  mit  $e$ . Ausser den 27 Ebenen  $e$  ist auch noch  $E$  eine Doppeltangentialebene von  $K_4$ ; ihre beiden Berührungskanten sind die Haupttangenten  $t_1$  und  $t_2$  der  $F_3$  in  $p$ .

Die erste Polare  $F_2$  des Punktes  $p$  ist eine Fläche zweiten Grades, welche durch die 54 Punkte  $(r, s)$  geht, und auf welcher die Haupttangenten  $t_1$  und  $t_2$  ihrer ganzen Ausdehnung nach liegen. Dieselbe schneidet  $F_3$  in einer Raumcurve sechsten Grades  $C_6$ , welche in  $p$  einen Doppelpunkt besitzt; verbindet man diesen mit allen Punkten der  $C_6$  durch Geraden, so erhält man den Tangentenkegel  $K_4$ , oder auch: die sämtlichen Tangenten der  $C_6$  bestimmen mit dem Punkte  $p$  die sämtlichen Tangentialebenen von  $K_4$ .

Es mag noch bemerkt werden, dass keine der Tangenten  $C_6$ , deren Berührungspunkt nicht  $p$  ist, diesen Punkt enthalten wird, denn sonst wäre diese Tangente eine Gerade der  $F_3$ , während, um die Allgemeinheit der Resultate zu wahren, für die vorliegende Betrachtung aus-

Mathematische Annalen I. \*

9

FIGURE 3.1. Première page de l'article « Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades » de Geiser.

Geiser considère donc une surface cubique sans singularité  $F_3$ , et un point  $p$  de l'espace. Il énonce que le cône de sommet  $p$  tangent à la surface<sup>93</sup> est de degré 6, et que dans le cas où  $p$  appartient à la surface cubique, ce qui est supposé dans la suite, ce cône se compose du plan  $E$  tangent à la surface en  $p$  et d'un cône  $K_4$  de

93. Par définition, le cône de sommet  $p$  tangent à la surface cubique est l'ensemble des points  $p'$  de l'espace tels que la droite  $pp'$  soit tangente à la surface. Cayley et Salmon l'avaient déjà utilisé en 1849 dans [5] pour établir l'existence des vingt-sept droites sur les surfaces cubiques. Pour une preuve analytique, c'est-à-dire avec des méthodes de géométrie analytique, des résultats utilisés ici par Geiser, on peut par exemple regarder [58]. Se reporter également à la fin de cette section 3.2.1, où le calcul mené permet de voir dans un cas particulier que le degré d'un cône tangent à une surface de degré  $n$  est  $n(n-1)$ .

degré 4. Geiser prend alors une droite  $g$  de la surface cubique : le plan  $e$  contenant  $p$  et  $g$  coupe la surface cubique en une courbe de degré 3 contenant nécessairement la droite  $g$ , donc composée de la droite  $g$  et d'une conique. Les points d'intersection de cette conique avec  $g$  sont not es  $r$  et  $s$ ; le plan  $e$  est tangent à la surface cubique en chacun de ces points, puisque ce sont des points doubles de la courbe intersection de  $e$  et de  $F_3$ . Le plan  $e$  est par conséquent un plan tangent double au cône  $K_4$ , les arêtes de contact étant les droites  $pr$  et  $ps$ . Geiser obtient ainsi 27 plans tangents doubles  $e$  à  $K_4$ , auxquels il ajoute le plan  $E$  qui est également doublement tangent à  $K_4$ , les arêtes de contact étant dans ce cas les deux tangentes principales<sup>94</sup>  $t_1, t_2$  à la surface cubique en  $p$ .

La construction de la courbe quartique est alors la suivante (se reporter en parallèle à la figure 3.2). Geiser considère un plan  $\mathfrak{E}$  de l'espace. Ce plan coupe le cône  $K_4$  selon une courbe quartique (plane)  $C_4$  dont les vingt-huit tangentes doubles sont obtenues comme suit. Pour chaque plan  $e$  comme précédemment, l'intersection de  $e$  avec  $\mathfrak{E}$  est une droite  $g'$  qui est tangente double à la quartique, les points de contact étant les points d'intersection  $r'$  et  $s'$  de  $\mathfrak{E}$  avec  $pr$  et  $ps$ . Cela donne vingt-sept tangentes doubles. La dernière est l'intersection  $\gamma'$  des plans  $\mathfrak{E}$  et  $E$ , les points de contact  $t'_1, t'_2$  étant les points d'intersection de  $\mathfrak{E}$  avec les tangentes principales  $t_1, t_2$ .

Récapitulons : on obtient une courbe quartique  $C_4$  en intersectant le cône  $K_4$  avec un plan quelconque  $\mathfrak{E}$ . Parmi les vingt-huit tangentes doubles à  $C_4$ , vingt-sept sont les projections (de centre  $p$ ) sur  $\mathfrak{E}$  des droites de  $F_3$  et la vingt-huitième est l'intersection de  $\mathfrak{E}$  et du plan tangent à  $F_3$  en  $p$ .

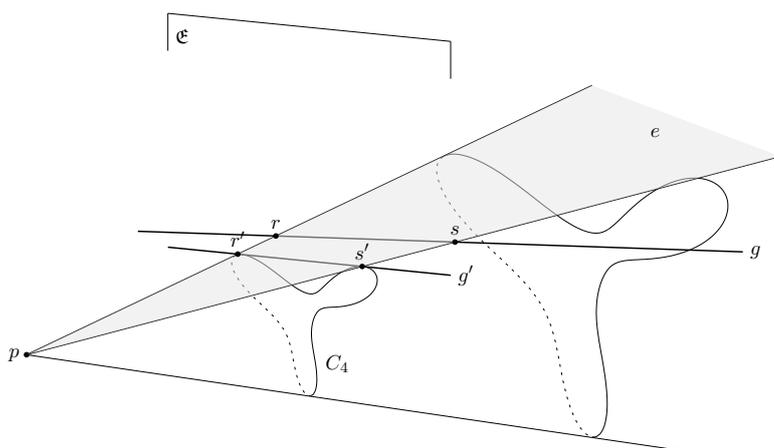


FIGURE 3.2. Construction de la quartique  $C_4$ . Les deux quartiques sont des sections du cône  $K_4$ . La droite  $g$  de la surface cubique se projette sur une tangente double  $g'$  de la quartique  $C_4$ .

Avant de passer à la construction réciproque, Geiser établit une propriété de la configuration géométrique qu'il vient de construire. Bien qu'il ne le dise pas, cette propriété lui permet de préparer la construction réciproque. Geiser prouve ainsi que le plan  $\mathfrak{E}$  rencontre la surface cubique en une courbe cubique  $C_3$  qui est tangente à la courbe quartique  $C_4$  en six points. Il montre en outre que ces six points ainsi que  $t'_1$  et  $t'_2$  sont situ es sur une même conique  $C_2$ .

L'objectif de Geiser dans la section II est de montrer

94. Les tangentes principales (« Haupttangenten ») à une surface en un point sont les deux droites tangentes à cette surface en  $p$  avec un contact d'ordre au moins 3. Voir [58, p. 244], où l'auteur les désigne sous le nom « inflexional tangents ».

« que réciproquement, toute courbe plane  $C_4$  de degré 4 peut être mise en relation avec une surface du troisième degré de la façon qui vient d'être expliquée<sup>95</sup>. » [21, p. 130]

Geiser commence par montrer le théorème suivant. Étant donnée une courbe quartique plane  $C_4$ , on fait passer une conique quelconque  $C_2$  par les deux points de contact  $t'_1, t'_2$  de cette courbe avec une de ses tangentes doubles, notée  $\gamma'$ . Cette conique coupe la quartique en six autres points  $b_1, \dots, b_6$ . Alors il existe une courbe cubique  $C_3$  qui est tangente à la quartique en ces six points<sup>96</sup> (voir la figure 3.3).

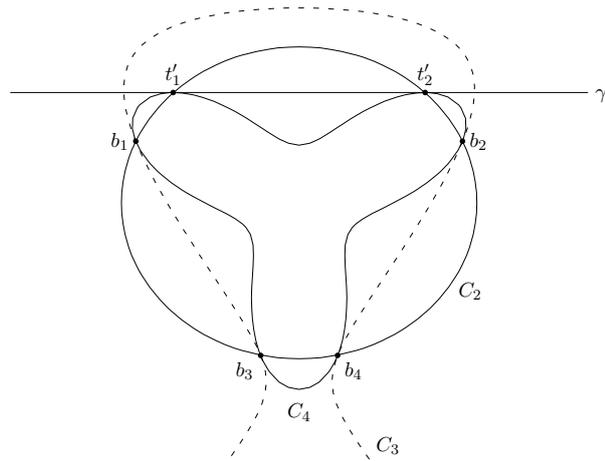


FIGURE 3.3. Construction de la conique  $C_2$  et de la cubique  $C_3$ . Pour des raisons de place, seule une des composantes connexes de  $C_3$  apparaît sur cette figure. Les points  $b_5$  et  $b_6$  sont des points complexes et n'apparaissent donc pas sur cette figure.

Voici la démonstration de Geiser du théorème précédent. On définit un faisceau de quartiques avec la courbe  $C_4$  et la courbe  $C_2$ , comptée avec multiplicité 2 : les points-base de ce faisceau sont  $t'_1, t'_2, b_1, \dots, b_6$ , chacun étant compté avec multiplicité 2. On définit ensuite une courbe cubique  $C_3$  assujettie à passer par  $b_1, b_2, b_3$  (comptés avec multiplicité 2) et par  $b_4, b_5, b_6$  (comptés avec multiplicité 1), puis on définit la courbe  $C_4''$  comme étant la réunion de  $C_3$  et de  $\gamma'$ . Par construction,  $C_4''$  passe par  $t'_1, t'_2, b_1, b_2, b_3$  avec multiplicité 2 et par  $b_4, b_5, b_6$  avec multiplicité 1. Or, ce sont là les 13 points-base du faisceau ; par conséquent,  $C_4''$  fait partie du faisceau, et en particulier, elle contient  $b_4, b_5, b_6$  avec multiplicité 2. Comme enfin ces trois points ne sont pas sur  $\gamma'$ , ils sont sur  $C_3$ . Donc  $C_3$  contient  $b_1, \dots, b_6$  avec multiplicité 2 à chaque fois : c'est dire que  $C_3$  est tangente à  $C_4$  en ces six points.

Geiser passe ensuite à la construction de la surface cubique. Il part d'une courbe quartique  $C_4$  contenue dans un plan  $\mathfrak{E}$  et lui applique le théorème que nous venons d'énoncer, obtenant ainsi une cubique  $C_3$ . Il considère un point  $p$  situé hors de  $\mathfrak{E}$  ainsi que le plan  $E$  contenant  $p$  et la tangente double  $\gamma'$ . Dans ce plan  $E$ , il construit une courbe cubique  $C_3'$  ayant  $p$  comme point double, avec  $pt'_1, pt'_2$  comme

95. « Dass umgekehrt jede beliebige ebene Curve vierten Grades  $C_4$  zu eine Fläche dritten Grades in die eben auseinandergesetzte Beziehung gebracht werden kann. »

96. Ce théorème est une sorte de réciproque à la propriété de la fin de la section I. En outre, Geiser fait référence à [30], où le même théorème est donné et démontré.

tangentes en ce point, et passant par les trois points d'intersection de  $\gamma'$  et de  $C_3$ <sup>97</sup>. Se reporter à la figure 3.4 pour visualiser la situation à ce stade de la preuve.

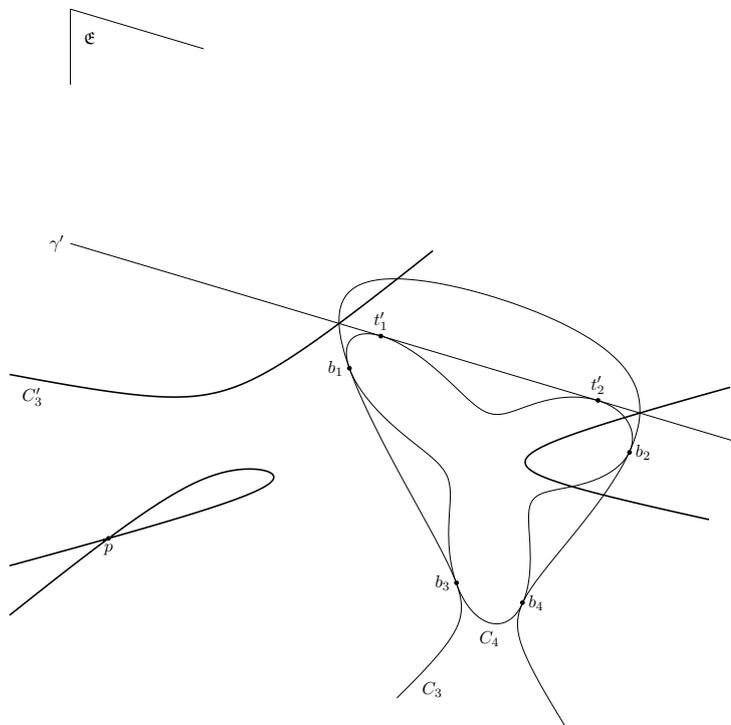


FIGURE 3.4. La cubique  $C'_3$ , en gras, est dans le plan  $E$  défini par  $p$  et par  $\gamma'$ . Le troisième point d'intersection de  $\gamma'$  et de  $C_3$  n'apparaît pas sur la figure.

Geiser définit alors un faisceau de surfaces cubiques contenant  $C_3$ ,  $C'_3$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$ <sup>98</sup>. Il justifie cette existence par le fait que ces éléments « comptent pour 18 points ». En effet, la cubique  $C_3$  compte pour 9 points et la cubique  $C'_3$  compte pour 6 points car elle est assujettie à passer par les trois points de  $\gamma' \cap C_3$ . Il y a donc 18 points, ce qui permet de définir un faisceau.

Ce faisceau de surfaces cubiques donne lieu à un faisceau de cônes de degré 4 à 16 arêtes-base (les arêtes  $pt'_1$ ,  $pt'_2$ ,  $pb_1$ ,  $\dots$ ,  $pb_6$  toutes compt es deux fois), chacun de ces cônes étant le cône de sommet  $p$  tangent à une surface cubique du premier faisceau. Les intersections de ces cônes avec le plan  $\mathfrak{E}$  forment à leur tour un faisceau de courbes quartiques à seize points-base  $t'_1, t'_2$ ,  $b_1, \dots, b_6$  (tous compt es deux fois). Puisque la quartique  $C_4$  du départ contient tous ces points-base, elle fait partie du faisceau. Geiser en déduit qu'il lui correspond une surface cubique du premier faisceau. Cette surface est celle qui était cherch e, et Geiser conclut :

97. L'existence de  $C'_3$  n'est pas justifi e. Geiser laisse implicite le fait qu'imposer les tangentes  $pt'_1$ ,  $pt'_2$  en  $p$  compte pour  $2 \times 2$  conditions ponctuelles. Il y a donc bien en tout 9 conditions ponctuelles.

Tout est fait pour reconstruire la surface cubique au vu de ce qui a été fait dans la section I : l'intersection de celle-ci avec  $\mathfrak{E}$  doit être  $C_3$ , l'intersection avec  $E$  doit être une courbe cubique avec un point double en  $p$  (puisque  $E$  est tangent à la surface en  $p$ ), etc.

98. La cubique cherch e fait nécessairement partie de ce faisceau, puisque d'après ce qui a été vu par Geiser en section I, elle doit contenir  $C_3$ ,  $C'_3$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$ .

« Une courbe plane quelconque de degré quatre peut toujours être conçue comme l'intersection du plan la contenant avec le cône tangent à une surface du troisième degré en un point de cette surface<sup>99</sup>. » [21, p. 132]

Cela constitue ainsi la construction réciproque de celle de la section I, et établit donc le lien entre surface cubiques et courbes quartiques.

Dans la troisième section, Geiser propose de montrer de façon analytique<sup>100</sup> le dernier théorème que nous avons cité (note 99). Il choisit dans le plan  $U$  de la quartique  $C_4$  des coordonnées (projectives)  $x, y, z$  telles que l'axe des  $z$  soit une des tangentes doubles à la quartique et les autres axes passent par les points de contact de cette tangente double avec la quartique. Il énonce alors que l'équation de la courbe est de la forme<sup>101</sup>

$$z \cdot \varphi_3(x, y, z) - x^2 y^2 = 0,$$

où  $\varphi_3$  est une fonction homogène de degré 3. Geiser considère un point  $p$  situé hors du plan  $U$  et forme les plans  $X, Y, Z$  contenant  $p$  et les axes des  $x, y, z$  respectivement. Les coordonnées de l'espace choisies sont  $x, y, z, u$ , et Geiser affirme que la surface d'équation

$$F_3 = \varphi_3(x, y, z) + 4xyu + 4u^2z = 0$$

est telle que l'intersection de son cône tangent en  $p$  par le plan  $U$  est exactement la courbe quartique du départ.

Complétons Geiser en vérifiant ce dernier point. Pour cela, suivons la démarche que Salmon utilise dans [58, p. 245] pour trouver le degré d'un cône tangent à une surface. Soit  $q \neq p$  un point de coordonnées  $x, y, z, u$ . Il appartient au cône tangent si, et seulement si la droite  $pq$  est tangente à  $F_3$ . Comme les points de la droite  $pq$  sont les points de coordonnées  $(\mu x, \mu y, \mu z, \lambda + \mu u)$  avec  $(\lambda : \mu)$  quelconque, cette droite est tangente à  $F_3$  si, et seulement si l'équation

$$F_3(\mu x, \mu y, \mu z, \lambda + \mu u) = 0$$

possède une racine double en  $(\lambda : \mu)$ . Or cette équation s'écrit

$$(\varphi_3(x, y, z) + 4xyu + 4zu^2)\mu^3 + 4(xy + zu)\mu^2\lambda + 4z\mu\lambda^2 = 0.$$

Elle possède une solution double si, et seulement si son discriminant est nul, c'est-à-dire si, et seulement si

$$(xy + uz)^2 - z(\varphi_3(x, y, z) + 4xyu + zu^2) = 0.$$

Cette dernière équation est celle du cône; son intersection avec le plan  $U$  s'obtient en y substituant  $u = 0$ , ce qui conduit à

$$x^2 y^2 - z\varphi_3(x, y, z) = 0,$$

ce qui est bien l'équation de la quartique  $C_4$ .

99. « Eine beliebige Curve vierten Grades in der Ebene kann stets aufgefasst werden als der Durchschnitt des Tangentenkegels, welcher von einem Punkte einer Fläche dritten Grades aus an diese Fläche geht, mit der Ebene der Curve. »

100. « Auch analytisch ergibt sich dieser Satz leicht », [21, p. 132]. Geiser ne donne pas de raison à son choix de présenter une démonstration analytique.

101. En effet, il suffit de traduire les conditions sur les points de contact de la tangente double : par exemple, dire que le point de coordonnées  $(1 : 0 : 0)$  appartient à la courbe signifie que l'équation de celle-ci ne contient pas de terme en  $x^4$ ; dire que ce même point est point de contact d'une tangente implique qu'il n'y a pas de terme en  $y^3x$ , etc.

Comme nous l'avons annonc e, voyons encore ce que fait Geiser dans la section V. Il considère une surface cubique  $F_3$ , un point  $p$  de cette surface et trois droites  $g_1, g_2, g_3$  de la surface formant un triangle. Il rappelle que les plans contenant  $p$  et  $g_i$  coupent la surface  $F_3$  en la droite  $g_i$  et une conique  $K_i$ , et note comme il l'a fait précédemment  $r_i, s_i$  les points d'intersection de  $g_i$  et  $K_i$ . Puisque tous les points  $r_i, s_i$  appartiennent à la fois à la polaire  $F_2$  de  $p$  par rapport à  $F_3$  et au plan du triangle  $g_1g_2g_3$ , ils sont tous situ es sur une même conique  $K$ . En outre, comme les tangentes principales  $t_1, t_2$  sont contenues dans  $F_2$ , elles intersectent nécessairement la conique  $K$ .

Geiser applique ensuite son résultat de la section I : les trois droites  $g_1, g_2, g_3$  se projettent en trois tangentes doubles  $g'_1, g'_2, g'_3$  à la quartique  $C_4$  dont les points de contact sont les projections  $r', s'$  des points  $r, s$ . De plus, les droites  $t_1, t_2$  deviennent les points de contact  $t'_1, t'_2$  d'une autre tangente double  $\gamma'$ . Enfin, la conique  $K$  se projette sur une conique  $K'$  du plan de la courbe  $C_4$ , de sorte que les 8 points de contact  $r', s', t'_1, s'_1$  appartiennent à cette conique  $K'$ .

Résumons : les vingt-huit tangentes doubles d'une courbe quartique se regroupent 4 par 4 de sorte que les 8 points de contact correspondants sont situ es sur une même conique. Plus précisément, si on se donne une tangente double  $\gamma'$ , elle se regroupe avec chaque triplet de tangentes doubles correspondant à un triplet de droites de la surface cubique formant un triangle. Cela concorde avec ce que Jordan a fait pour l'équation aux vingt-huit tangentes doubles. En effet, Jordan a utilis e ces groupements de 4 tangentes doubles pour introduire une fonction  $\varphi_4$  (voir le début de la section 3.1.1). Il a ensuite montré que l'adjonction d'une des racines mène à une nouvelle fonction  $\psi$  dont les termes correspondent aux tangentes qui étaient groupées avec celle donnée par la racine adjointe. Enfin, Jordan a fait remarquer que cette fonction  $\psi$  est identique à la fonction  $\varphi$  des vingt-sept droites, laquelle est formée grâce aux 45 triangles.

Il existe donc bien un parallèle entre l'approche de Jordan et celle de Geiser : il s'agit d'interpréter l'adjonction d'une racine en la distinction d'une tangente double et de voir que les droites (ou les racines) en relation avec celle-ci correspondent trois par trois aux triangles d'une surface cubique. Cependant, notons bien que ni Geiser ni Jordan ne proposent une telle interprétation. Nous y reviendrons plus tard, après avoir regard e ce que Geiser fait pour le lien entre les vingt-sept droites et les seize droites.

*3.2.2. Des vingt-sept droites aux seize droites.* L'article de Geiser sur les surfaces quartiques à conique double est divis e en cinq sections numérotées en chiffres romains. Il débute par une courte introduction, essentiellement constituée de ce que nous avons cit e au début de la section 3, où est entre autres annoncée la démonstration géométrique de la relation entre les seize droites de ces quartiques et les vingt-sept droites des surfaces cubiques. Cette introduction annonce également que la démonstration sera effectuée de deux manières différentes. De fait, les sections I et II constituent une première manière ; les sections III et IV en constituent une seconde. Dans la dernière section, Geiser expose quelques propriétes supplémentaires dans le cas où la conique double de la quartique est le « cercle imaginaire à l'infini ». Nous ne parlons pas de ces propriétes qui sortent de notre propos.

Première démonstration : représentations de surfaces sur un plan. La première démonstration utilise la théorie des représentations de surfaces sur un plan, et plus particulièrement les représentations des surfaces cubiques et des surfaces quartiques à conique double. Avant de décrire la démarche de Geiser, expliquons en quoi consiste cette théorie, en prenant pour exemple la représentation des surfaces cubiques sur un plan.

Dans un article intitulé « Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung »<sup>102</sup>, Clebsch montre le résultat suivant :

« À chaque point du plan correspond en général un point de la surface et réciproquement ; sont exceptés seulement six points du plan, auxquels ne correspondent pas des points de la surface, mais des droites<sup>103</sup> ». [8, p. 361]

La correspondance dont parle Clebsch est justement la représentation de la surface sur un plan. Plus précisément, nous allons voir que, en termes modernes, Clebsch établit une transformation birationnelle entre le plan (projectif) et la surface cubique. En fait, la représentation qu'il donne s'interprète avec un point de vue actuel comme l'éclatement du plan projectif en six points<sup>104</sup>. Voyons donc comment Clebsch construit cette représentation. Nous suivons sa démarche tout en utilisant un formalisme et des notations plus actuels afin d'alléger cette explication.

Rappelons d'abord qu'une *gerbe de plans* est l'ensemble des plans de l'espace passant par un point donné, appelé le *sommet* de la gerbe. Traduisons-le de façon analytique, c'est-à-dire avec des équations. Comme Clebsch, nous notons  $a = 0$  une équation de plan ; dans cette écriture, il est sous-entendu que  $a$  est une forme linéaire non nulle en les quatre coordonnées homogènes de l'espace  $x_1, x_2, x_3, x_4$  — l'équation s'écrit donc aussi  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ . Maintenant, si  $p$  est un point de l'espace donné comme l'intersection de trois plans  $a = 0$ ,  $b = 0$  et  $c = 0$ , les plans de la gerbe de sommet  $p$  sont les plans d'équation  $\chi a + \lambda b + \mu c = 0$ , avec  $(\chi : \lambda : \mu) \in E \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  quelconque.

Revenons à la représentation des cubiques. Renvoyant à [60], Clebsch se base sur le fait qu'une surface cubique peut être décrite comme le lieu d'intersection de trois gerbes projectives de plans. Analytiquement, si on a trois gerbes projectives de plans<sup>105</sup>  $\chi a + \lambda b + \mu c = 0$ ,  $\chi a' + \lambda b' + \mu c' = 0$ ,  $\chi a'' + \lambda b'' + \mu c'' = 0$ , un point d'intersection de ces gerbes projectives est donné par un système

$$(S_\Lambda) \begin{cases} \chi a + \lambda b + \mu c = 0 \\ \chi a' + \lambda b' + \mu c' = 0 \\ \chi a'' + \lambda b'' + \mu c'' = 0 \end{cases}$$

pour un  $\Lambda = (\chi : \lambda : \mu)$  donné. Une surface cubique  $F_3$  est donc formée de tous les points définis par tous les systèmes  $(S_\Lambda)$  possibles. Autrement dit, un point  $x$  appartient à  $F_3$  si, et seulement s'il existe un (unique)  $\Lambda = (\chi : \lambda : \mu)$  tel que  $x$  vérifie  $(S_\Lambda)$ . En particulier, on a ainsi une application  $x \in F_3 \mapsto (\chi : \lambda : \mu) \in E$ .

Partant de cela, Clebsch procède comme suit. Si  $x \in F_3$ , le système  $(S_\Lambda)$  a des solutions non triviales et on peut exprimer  $x_1, x_2, x_3, x_4$  avec les formules dites de Cramer :

$$(*) \begin{cases} \rho x_1 = f_1(\chi, \lambda, \mu) \\ \rho x_2 = f_2(\chi, \lambda, \mu) \\ \rho x_3 = f_3(\chi, \lambda, \mu) \\ \rho x_4 = f_4(\chi, \lambda, \mu) \end{cases}$$

où les  $f_i$  sont des fonctions homogènes de degré 3 (ce sont les déterminants extraits du système  $(S_\Lambda)$ ) et  $\rho$  un facteur de proportionnalité. Ainsi, lorsqu'un point  $(\chi : \lambda : \mu)$  n'annule pas simultanément les  $f_i$ , on peut définir un point  $x$  par les formules (\*). Cela donne une application  $(\chi : \lambda : \mu) \mapsto x \in F_3$ , réciproque de l'application obtenue précédemment, définie partout sauf en les points qui annullent

102. [8]. Cet article est celui que Geiser cite pour rappeler les propriétés de la représentation d'une surface cubique sur un plan. Cf. *infra*.

103. « Jedem Punkt der Ebene entspricht also im Allgemeinen ein Punkt der Fläche und umgekehrt ; ausgenommen sind davon nur sechs Punkten der Ebene, denen nicht Punkte der Fläche entsprechen, sondern Gerade [*sic*] ».

104. Voir par exemple [26, p. 401]. Merci à Clément Dupont et Florent Martin pour leurs explications sur les transformations birationnelles et les éclatements.

105. Voir [55, p. 4] pour la définition de la notion de *projectivité* de gerbes.

simultanément les  $f_i$ . Clebsch montre que ces points exceptionnels sont au nombre de 6 et fait remarquer que si  $\Lambda$  est un de ces six points, le système  $(S_\Lambda)$  définit une droite de  $F_3$  (en effet, l'annulation simultanée des  $f_i$  implique que le rang du système diminue de 1).

Ainsi est donc construite par Clebsch la représentation d'une surface cubique  $F_3$  sur un plan  $E$ . Dans la suite de son article, il montre notamment à quoi correspondent, dans cette représentation, les courbes algébriques incluses dans le plan  $E$ . Geiser résume cette correspondance ainsi que les principes mêmes de la représentation dans son article sur les surfaces quartiques à conique double :

- (1) En général, à chaque point de  $F_3$  correspond un unique point de  $E$ , et réciproquement.
- (2) Dans  $E$ , il y a six points  $\sigma_1, \dots, \sigma_6$  en position générale<sup>106</sup> tels qu'à chacun d'eux correspond une droite contenue dans la cubique  $F_3$ .
- (3) à une courbe  $C_n$  incluse dans  $E$  et passant  $\alpha_1$  fois par  $\sigma_1$ ,  $\alpha_2$  fois par  $\sigma_2$ , etc., correspond une courbe gauche  $C_N$  de degré  $N = 3n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_6)$ , incluse dans  $F_3$ , et rencontrant  $\alpha_1$  fois la droite correspondant à  $\sigma_1$ ,  $\alpha_2$  fois la droite correspondant à  $\sigma_2$ , etc.

Toujours en citant Clebsch<sup>107</sup>, Geiser donne ensuite de façon analogue les propriétés caractérisant la représentation d'une surface quartique à conique double  $F_4$  sur un plan  $E$  :

- (1) En général, à chaque point de la surface  $F_4$  correspond un unique point de  $E$ , et réciproquement.
- (2) à chaque point de la conique double  $C_2$  de la quartique correspond un couple de points de  $E$ .
- (3) Dans  $E$ , il y a cinq points  $s_1, \dots, s_5$  en position générale<sup>108</sup> tels qu'à chacun d'eux correspond une droite contenue dans la quartique  $F_4$ .
- (4) à une courbe  $C_n$  incluse dans  $E$  et passant  $a_1$  fois par  $s_1$ ,  $a_2$  fois par  $s_2$ , etc., correspond une courbe gauche  $C_N$  de degré  $N = 3n - (a_1 + \dots + a_5)$ , incluse dans  $F_4$ , et rencontrant  $a_1$  fois la droite correspondant à  $s_1$ ,  $a_2$  fois la droite correspondant à  $s_2$ , etc.

Ces propriétés ayant été rappelées, Geiser poursuit en indiquant qu'une surface cubique et une surface quartique à conique double peuvent être mises en relation en les représentant sur un même plan  $E$ , où il est même possible de choisir  $s_1 = \sigma_1, \dots, s_5 = \sigma_5$ . Afin de mettre en correspondance les droites de ces surfaces, il détaille leur provenance dans chacune des représentations<sup>109</sup>. Ainsi, les vingt-sept droites de la surface cubique consistent en :

- (1) les six droites  $\gamma_1, \dots, \gamma_6$  correspondant aux points  $\sigma_1, \dots, \sigma_6$ ,
- (2) les quinze droites  $\lambda_{\mu\nu}$  correspondant aux droites  $\sigma_\mu\sigma_\nu$ ,

106. Nous traduisons ainsi l'expression « In  $E$  liegen sechs ausgezeichnete, ihrer Lage nach von einander unabhängige Punkte  $\sigma_1, \dots, \sigma_6$  ». Ici, cela signifie que les  $\sigma_i$  ne sont pas sur une même conique et sont trois à trois non align es.

107. L'article de Clebsch en question est [9]. L'auteur y construit une représentation des surfaces quartiques à conique double par des moyens analogues à ceux qu'il a utilis es pour la représentation des surfaces cubiques.

108. Ici, cela signifie que les points  $s_i$  sont trois à trois non align es. Voir la note 106.

109. Il ne le démontre pas, mais ce qu'il énonce découle directement des propriétés des représentations. Par exemple, pour les surfaces cubiques, il y a déjà les six droites correspondant à chaque  $\sigma_i$  vu la propriété 1 de la représentation. La propriété 3 permet de trouver les autres, qui sont des  $C_N$  avec  $N = 1$  : il s'agit donc de trouver des courbes  $C_n$  qui correspondent à un  $C_1$ . Il y en a quinze qui correspondent à  $n = 1$  et pour lesquelles deux des  $\alpha$  valent 1 et les autres 0 : ce sont les droites joignant les  $\sigma_i$  deux à deux. Il y en a six qui correspondent à  $n = 2$  et pour lesquelles tous les  $\alpha$  valent 1, sauf un qui est nul : ce sont les coniques passant par cinq des  $\sigma_i$  sauf un. On obtient ainsi les vingt-sept droites.

- (3) les six droites  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_6$  correspondant aux coniques passant par cinq des six points  $\sigma_1, \dots, \sigma_6$  (notées avec la convention que  $\Gamma_k$  correspond à la conique passant par les points autres que  $\sigma_k$ );

tandis que les seize droites des surfaces quartiques à conique double consistent en :

- (1) les cinq droites  $g_1, \dots, g_5$  correspondant aux points  $s_1, \dots, s_5$ ,
- (2) les dix droites  $l_{mn}$  correspondant aux droites  $s_m s_n$ ,
- (3) la droite  $G_6$  correspondant à la conique passant par les cinq points  $s_1, \dots, s_5$ .

Cela permet à Geiser d'associer ces droites entre elles comme ceci :

$$\begin{aligned} g_1, \dots, g_5 & ; l_{12}, \dots, l_{45} & ; G_6 \\ \gamma_1, \dots, \gamma_5 & ; \lambda_{12}, \dots, \lambda_{45} & ; \Gamma_6 \end{aligned}$$

et d'énoncer le résultat suivant : il est possible d'associer aux seize droites du  $F_4$ , seize des vingt-sept droites du  $F_3$ , dès lors que ces seize-là sont les seize restantes quand, parmi les vingt-sept, on en sélectionne une puis on l'élimine ainsi que les dix qui lui sont incidentes (par exemple  $\gamma_6$  et  $\lambda_{16}, \dots, \lambda_{56}, \Gamma_1, \dots, \Gamma_5$ ). De plus, les relations d'incidence entre les seize droites de chaque groupe sont les mêmes<sup>110</sup>.

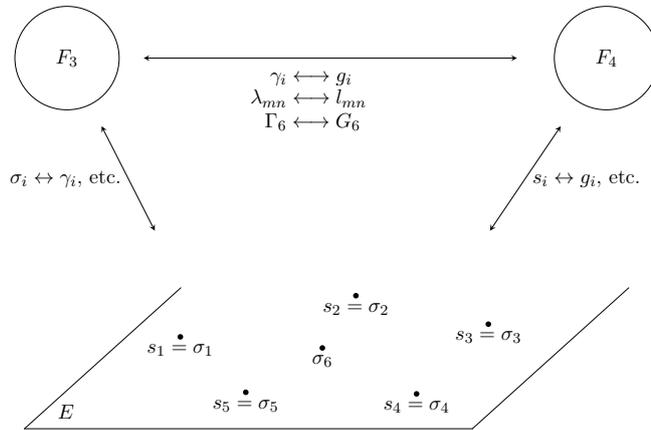


FIGURE 3.5. Les représentations des surfaces  $F_3$  et  $F_4$  sur le même plan  $E$ , en faisant coïncider les points-base.

Seconde démonstration : généralisation du principe des rayons réciproques. La seconde démonstration du lien entre les droites des surfaces cubiques et des surfaces quartiques à conique double est présentée par Geiser comme

« [une] application d'une correspondance du second degré, qui est une généralisation du principe des rayons réciproques<sup>111</sup>. » [22, p. 252]

Les idées de cette correspondance sont exposées dans la section III : étant donné une surface quadrique  $F_2$  et un point  $P$ , on associe à tout point  $p$  de l'espace

110. Cette propriété est importante, car elle s'interprète en l'identité du groupe de l'équation aux seize droites et du groupe de l'équation de degré 16 obtenue en adjoignant une de ses racines à l'équation aux vingt-sept droites. Voir également la note 117.

111. « [eine] Anwendung einer geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades, welche eine Verallgemeinerung des Principis der reciproken Radien ist ». Geiser indique en référence [19]. Quant au principe des rayons réciproques, en voici l'idée (telle qu'elle est exposée dans [20]) : dans un plan sont donnés un cercle  $K$  de centre  $M$  et un point  $p$ . On note  $P$  la polaire de  $p$  par rapport à  $K$ , c'est-à-dire la droite joignant les deux points de contact des deux tangentes à  $K$  menées par  $p$ . Il s'agit alors d'associer à  $p$  le point  $p'$  défini comme étant l'intersection des droites  $P$  et  $Mp$ .

le point  $p'$  défini comme étant le quatrième harmonique à  $p$ ,  $s_1$  et  $s_2$ <sup>112</sup>, où ces derniers points  $s_1$  et  $s_2$  sont les points d'intersection de la droite  $Pp$  avec  $F_2$  (voir la figure 3.6).

Geiser indique que l'application ainsi définie est en géneral univoque et réciproque (« eindeutig und reciprok »), avec deux cas exceptionnels : au point  $P$  lui-même est associ e le plan polaire  $E$  de  $P$  par rapport à  $F_2$ <sup>113</sup>, et à un point  $p$  de la conique  $C_2$  intersection de  $E$  et  $F_2$  est associ e la droite  $pP$ .

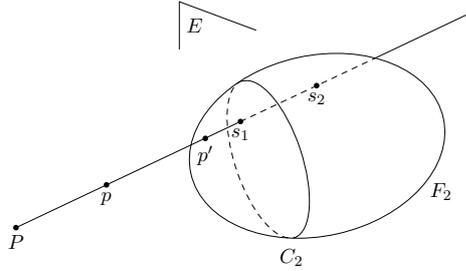


FIGURE 3.6. Généralisation du principe des rayons réciproques.

Sont ensuite énoncées les règles de correspondance des courbes et des surfaces par cette transformation. Ainsi, à une courbe gauche  $C_n$  qui rencontre  $a$  fois  $C_2$  et passe  $b$  fois par  $P$ , correspondent :

- (1) le plan  $E$  compt e  $b$  fois,
- (2) un système de  $a$  arêtes du cône  $K_2$  de sommet  $P$  et de base  $C_2$ ,
- (3) une courbe gauche  $C'_{2n-(a+b)}$  qui rencontre  $C_2$  en  $2n - (a + 2b)$  points et passe  $n - a$  fois par  $P$ .

Et à une surface  $F_n$  contenant  $a$  fois le point  $P$  et contenant  $b$  fois la conique  $C_2$  correspondent :

- (1) le plan  $E$  compt e  $a$  fois,
- (2) le cône  $K_2$  compt e  $b$  fois,
- (3) une surface  $F'_{2n-(a+2b)}$  qui contient  $(n - 2b)$  fois le point  $P$  et  $n - (a + b)$  fois la conique  $C_2$ .

Dans la section IV, Geiser applique ensuite cette transformation au problème des surfaces quartiques   conique double. Il considère donc une telle surface  $F_4$ , note  $E$  le plan contenant la conique double  $C_2$  et considère un point  $P$  situ e sur  $F_4$  mais pas sur  $C_2$ . Le cône  $K_2$  de sommet  $P$  et de base  $C_2$  définit, avec le plan  $E$  compt e double, un faisceau de quadriques. Geiser considère alors une des quadriques de ce faisceau (différente de  $C_2$  et de  $E$ ) qu'il note  $F_2$  et qui va servir à la correspondance décrite précédemment. Les règles de transformation indiquent alors qu'à la surface  $F_4$  correspondent<sup>114</sup> :

112. C'est-à-dire que  $p'$  est le point de la droite contenant  $p$ ,  $s_1$  et  $s_2$  tel que ces quatre points forment, dans cet ordre, une division harmonique, c'est-à-dire tel que le rapport anharmonique (ou birapport)  $\frac{p'p}{p's_1} : \frac{s_2p}{s_2s_1}$  de ces quatre points soit égal à  $-1$ .

113. Le plan polaire de  $P$  par rapport à  $F_2$  est le plan contenant la conique formée de tous les points  $M$  de  $F_2$  tels que la droite  $PM$  est tangente à  $F_2$ . Avec des équations : si  $F_2$  est donn e par l'annulation d'une forme quadratique  $q(x, y, z, w) = 0$ , alors le plan polaire de  $P$  par rapport à  $F_2$  a pour équation  $B(P, X)$ , où on a not e  $B$  la forme polaire de  $q$  et  $X = (x, y, z, w)$ .

114. Il suffit d'appliquer la règle de transformation des surfaces avec  $n = 4$ ,  $a = 1$  et  $b = 2$ , ce qui traduit que la surface quartique contient  $P$  et  $C_2$  comme conique double.

- (1) le plan  $E$  compté une fois,
- (2) le cône  $K_2$  compté deux fois,
- (3) une surface cubique  $F'_3$  contenant  $C_2$  une fois mais ne contenant pas  $P$ ;

Et à une surface cubique quelconque  $F'_3$  contenant une fois  $C_2$  mais ne contenant pas  $P$  correspondent <sup>115</sup> :

- (1) le cône  $K_2$  compté une fois,
- (2) une surface quartique  $F_4$  avec  $C_2$  comme conique double.

Cette transformation permet ainsi d'associer un point de  $F'_3$  à un point de  $F_4$ , et réciproquement, à quelques cas exceptionnels près. Par exemple, à  $P$  correspond, sur  $F'_3$ , l'intersection de  $E$  avec  $F'_3$ , c'est-à-dire la conique  $C_2$  et une droite  $\gamma_6$ . Geiser obtient ainsi une application du  $F_4$  sur le  $F'_3$ .

Enfin, Geiser s'occupe des droites des surfaces. En concordance avec ses notations antérieures, il note  $\gamma_1, \dots, \gamma_5$ ;  $\lambda_{12}, \dots, \lambda_{45}$ ;  $\Gamma_6$  les droites de la surface cubique  $F'_3$  qui ne rencontrent pas  $\gamma_6$ . Ces droites rencontrent nécessairement  $C_2$ , donc leur image par la correspondance est à chaque fois une droite de la surface  $F_4$  <sup>116</sup>. Celles-ci sont notées  $g_1, \dots, g_5$ ;  $l_{12}, \dots, l_{45}$ ;  $G_6$  et Geiser indique que les relations d'incidence de ces seize droites sont les mêmes que pour les seize droites du  $F'_3$  auxquelles elles correspondent <sup>117</sup>.

En conclusion, Geiser fait une remarque comparative entre les deux correspondances entre surfaces cubiques et surfaces quartiques à conique double qu'il a présentées : pour lui, les deux coïncident, mais

« la seconde est une représentation plus directe, car elle met tout simplement  $F_4$  et  $F'_3$  en perspective par rapport à  $P$ . Cette seconde [correspondance] est ainsi à préférer pour déduire les propriétés du  $F_4$  à partir de celles du  $F'_3$  <sup>118</sup>. » [22, p. 255]

Comme exemple de déduction de telles propriétés, il indique (sans pour autant développer) la distinction entre éléments réels et imaginaires sur la surface quartique.

Il y a ainsi une raison d'applicabilité dans le choix de Geiser d'avoir présenté sa seconde méthode; mais il ne justifie pas le fait d'avoir donné deux méthodes différentes. Nous nous contenterons ici de souligner que, tout comme Geiser avait, dans son article sur les tangentes doubles, proposé une preuve analytique après en avoir donné une synthétique, les deux méthodes donnant le lien entre les surfaces cubiques et les surfaces quartiques à conique double appartiennent l'une à la géométrie analytique et l'autre à la géométrie synthétique : rappelons en effet que le *Jahrbuch* a classé l'article en question en géométrie analytique (rubrique « Correspondance, transformation univoque, représentation ») et en géométrie synthétique.

Il est cependant intéressant de noter que dans son *Programme d'Erlangen*, Klein évoque entre autres la « géométrie des rayons réciproques <sup>119</sup> » et la « géométrie des transformations rationnelles », qui correspondent à l'une et à l'autre des preuves de

115. Geiser ne l'indique pas, mais il suppose ici que  $F'_3$  contient  $C_2$  avec multiplicité 1. Le résultat qui suit s'obtient en appliquant la règle de transformation avec  $n = 3$ ,  $a = 0$  et  $b = 1$ .

116. Geiser ne justifie pas ces affirmations. Pour la première, il faut remarquer que si  $\gamma$  est une des droites, son point d'intersection avec  $E$  est inclus dans  $E \cap F'_3 = C_2 \cup \gamma_6$ ; mais comme  $\gamma$  et  $\gamma_6$  sont disjointes, ce point d'intersection appartient nécessairement à  $C_2$ . Pour déterminer ensuite l'image de  $\gamma$  sur  $F_4$ , il suffit d'appliquer la règle de transformation des courbes en prenant  $n = 1$ ,  $a = 1$  et  $b = 0$  (remarquer que  $\gamma$  ne contient pas le point  $P$  car  $F'_3$  ne le contient pas).

117. À nouveau, cette remarque sur la concordance des relations d'incidence a son importance pour l'interprétation au niveau des groupes. Voir la note 110.

118. « Die zweite derselben eine directere ist, indem durch sie  $F_4$  und  $F'_3$  in Bezug auf  $P$  geradezu perspectivisch aufeinander bezogen sind. diese zweite wird darum vorzugsweise geeignet sein, die Eigenschaften der  $F_4$  aus denen der  $F'_3$  abzuleiten. »

119. « Die Geometrie der reciproken Radien », traduit en « La géométrie des rayons vecteurs réciproques » dans [41].

Geiser. Il est possible d'interpréter le résultat de Geiser en termes de ces g eom etri es : les surfaces cubiques et les surfaces quartiques à conique double sont équivalentes à la fois dans la géométrie des transformations rationnelles et dans la géométrie des rayons réciproques. Dans le *Programme*, si Klein fait des analogies entre la géométrie des rayons réciproques et la géométrie projectives, il écrit également que la théorie des transformations rationnelles n'est pas assez développée pour qu'il puisse donner d'avantage que les « principes » d'une géométrie des transformations rationnelles ; en particulier, il ne donne pas de lien entre cette géométrie et la géométrie des rayons réciproques <sup>120</sup>.

Que ce soit par les représentations de surfaces sur un plan ou par sa généralisation du principe des rayons réciproques, Geiser a li e les surfaces cubiques et les surfaces quartiques à conique double par des transformations de l'espace. Ces transformations envoient les seize droites des quartiques sur seize des droites des surfaces cubiques de la façon que nous avons déjà décrite : parmi les vingt-sept droites d'une cubique, 16 droites qui ne sont pas incidentes à une droite donnée peuvent ˆetre mises en correspondance avec les seize droites d'une surface quartique à conique double, et cette correspondance conserve les relations d'incidence.

Comme précédemment, nous pouvons mettre ce résultat en relation avec le lien établi par Jordan entre les vingt-sept droites et les seize droites. Rappelons que Jordan a indiqu e que par adjonction d'une de ses racines, l'équation aux vingt-sept droites se scinde en deux facteurs de degrés 16 et 10, ayant mˆeme groupe que l'équation aux seize droites. à nouveau, interprétons l'adjonction d'une racine comme la sélection d'une droite ; les facteurs de degré 16 et 10 correspondent aux racines associées aux droites non incidentes, respectivement incidentes, à la droite donnée par la racine adjointe (voir 3.1.2). Dire que le groupe du facteur de degré 16 est identique à celui de l'équation aux seize droites se traduit alors par la conservation des relations d'incidence dans les transformations de Geiser. Encore une fois, ni Geiser ni Jordan ne proposent une quelconque correspondance entre leurs résultats respectifs.

#### 4. THÉORIE (DES SUBSTITUTIONS) ET GÉOMÉTRIE(S)

Rappelons qu'avant d'attaquer la lecture des preuves mathématiques de Jordan et de Geiser, nous en étions rest e à une double constatation. D'une part, ces derniers affirmaient que leurs approches respectives étaient bien distinctes au niveau disciplinaire, celle de Jordan relevant de l'algèbre, ou plus précisément de la théorie des substitutions, celle de Geiser relevant de la géométrie. D'autre part, ils annonçaient également certaines relations d'inspiration, de prévision ou de confirmation entre leurs approches.

La lecture attentive des travaux de Jordan et de Geiser sur les liens entre vingt-sept, vingt-huit et seize droites que nous avons faite nous permet à présent de revenir sur ces deux points. D'abord, le cloisonnement disciplinaire des deux approches est largement confirm e : Jordan utilise uniquement des techniques issues de la théorie des substitutions et Geiser uniquement des techniques de géométrie et en particulier, aucun des deux n'emprunte à l'autre un outil ou un morceau de preuve, de sorte que les deux approches sont totalement indépendantes l'une de l'autre.

Mais ce cloisonnement va plus loin, car aucune sorte de transfert heuristique, aucune traduction entre théorie des substitutions et géométrie n'apparaˆıt, au contraire de ce que laissaient entendre les propos de nos deux protagonistes. Regardons pour commencer la situation des vingt-huit tangentes doubles, dans laquelle c'est Jordan qui s'est inspir e de Geiser, d'après les commentaires que nous avons relev es au début de la section 3. Comme nous l'avons déjà relev e, Jordan ne fait aucune interprétation explicite entre ses résultats et ceux de Geiser. Ainsi, l'adjonction d'une racine

120. Voir [41, p. 18 et p. 28].

n'est pas traduite en termes de distinction d'une tangente double particulière, et l'identité de la fonction  $\psi$  qu'il obtient et de la fonction  $\varphi$  correspondant aux vingt-sept droites n'est pas interprétée en termes géométriques, à savoir que les vingt-sept tangentes doubles restantes se répartissent trois par trois de la même façon que les vingt-sept droites se répartissent trois par trois en triangles. Comme nous l'avons vu, ce dernier résultat est donné par Geiser en conséquence de la répartition quatre par quatre des tangentes doubles suivant que les points de contact correspondants appartiennent à une même conique — et c'est d'ailleurs ce résultat-là, attribué à Clebsch par Jordan, qui permet à ce dernier de construire sa fonction  $\varphi$  dans le cas des vingt-huit tangentes doubles.

Dans le cas des seize droites, ce sont les travaux de Geiser qui ont suivi ceux de Jordan. Là non plus, l'adjonction d'une racine n'est pas interprétée comme la sélection d'une droite particulière. Par ailleurs, si Geiser met en évidence le fait que parmi les vingt-sept droites d'une surface cubique, on peut en mettre seize en rapport avec les seize droites des surfaces quartiques à coniques doubles lorsque ce sont les seize qui ne sont pas incidentes à une droite donnée, il ne relie pas cela à la factorisation de l'équation aux vingt-sept droites après adjonction d'une racine — rappelons qu'apparaissent deux facteurs, l'un correspondant aux droites incidentes à la droite associée à la racine adjointe, l'autre correspondant aux droites non incidentes à cette droite. Enfin, l'identité des relations d'incidence entre les seize droites des surfaces quartiques et celles, comme *supra*, des surfaces cubiques, est bien mise en valeur par Geiser, mais elle n'est pas interprétée en termes d'égalité de groupes.

Tout cela crée ainsi une certaine distance entre théorie des substitutions et géométrie, distance accentuée par les champs lexicaux particuliers de la prévision et de la confirmation relevés dans les discours de nos deux protagonistes. À ce sujet, le plus marquant est peut-être Geiser, qui relègue à deux reprises les travaux de Jordan à des suppositions, à des conjectures (« Vermuthung »). Ce dernier point soulève d'ailleurs la question de la véracité d'un résultat ou de la validité d'une preuve en fonction des techniques utilisées. Prenons toutefois garde au fait que nous ne sommes pas dans une situation où se confrontent deux preuves d'un même théorème : ici, il n'y a justement pas de formulation commune d'un théorème, ce qui participe d'autant plus au hiatus entre théorie des substitutions et géométrie. Les mots de Geiser semblent ainsi plus se rapporter à l'approche de Jordan dans son intégralité, plaçant la théorie des substitutions du côté de l'heuristique : cette théorie permet de deviner des résultats géométriques, mais doit être évacuée dans un deuxième temps pour ne conserver que la géométrie.

Une situation analogue est susceptible d'apporter quelque lumière sur notre cas : le lien entre l'équation aux vingt-sept droites et celle de la trisection des fonctions hyperelliptiques, résultat du *Traité des substitutions* faisant partie de ceux retrouvés par d'autres mathématiciens. Qualifiée par Cremona de « véritable énigme à expliquer », Jordan indique dès 1870 qu'il faudrait en trouver une « démonstration définitive <sup>121</sup> », alors que lui-même a en fourni une preuve dans le *Traité*. Celle qu'il propose dans la suite de sa lettre consiste à exhiber une certaine configuration de droites vérifiant la même équation que celle de la trisection des fonctions hyperelliptiques. Ainsi, nous avons à nouveau une situation où la théorie des substitutions révèle des liens entre deux configurations mathématiques avant d'être évacuée — cette fois-ci par Jordan lui-même.

---

121. La première citation est extraite d'une lettre de Cremona à Jordan datant du 19 décembre 1869 conservée aux Archives de l'École Polytechnique (référence VI2A2(1855) 9). Cette lettre, ainsi que sa réponse du 11 janvier 1870 dont est tirée notre seconde citation, ont été éditées par Simonetta Di Sieno et Paola Testi Saltini, et seront prochainement publiées (sous la direction de Giorgio Israel) dans une œuvre contenant la correspondance de Luigi Cremona. Nous remercions Giorgio Israel de nous avoir fait parvenir les lettres entre Cremona et Jordan.

Le lien entre vingt-sept droites et fonctions hyperelliptiques nous apprend plus : une quinzaine d'années plus tard, alors que Klein élabore une résolution de l'équation aux vingt-sept droites par les fonctions hyperelliptiques calquée sur ses travaux sur l'équation de degré 5, Jordan lui écrit :

« Je suis persuad e que le rapprochement que j'ai signal e entre la trisection des fonctions elliptiques et les droites des surfaces cubiques n'est pas dû à un hasard et que les deux problèmes doivent être identiques au fond, et j'aimerais fort qu'on me le montrât <sup>122</sup>. »

La recherche d'unité exprimée ici nous invite à penser que Jordan conçoit les configurations dont nous parlons — vingt-sept droites et fonctions hyperelliptiques, et par extension liens entre vingt-sept, vingt-huit et seize droites — comme des phénomenes mathématiques d evoil es par le prisme de la théorie des substitutions ; l'unité n'inclut pas la théorie des substitutions, qui est plutôt un moyen de l'observer.

Par ces remarques, les liens entre les trois configurations de droites  tudi es ici ne rejoignent pas tout à fait la série de théorèmes du XIX<sup>e</sup> siècle dont les mathématiciens ont cherch e et trouv e des preuves différentes et indépendantes, comme par exemple la loi de réciprocité quadratique, la transcendance de  $e$  et de  $\pi$ , ou encore le théorème de clôture de Poncelet <sup>123</sup>. Pour ces exemples en effet, il s'agit d'un énoncé commun et de plusieurs démonstrations, éventuellement hiérarchisées entre elles par leurs auteurs selon leur simplicité, leur efficacité, leur rigueur, leur potentialité de généralisation, etc., ou vues dans leur multiplicité disciplinaire comme autant d'indices d'une unité mathématique <sup>124</sup>. Dans notre cas, comme nous l'avons écrit précédemment, cette unité concerne éventuellement les trois configurations de droites, mais pas les deux pendants algébrique et géométrique correspondant aux approches respectives de Jordan et de Geiser. D'autre part, nous avons déjà soulign e qu'il n'y a pas de formulation commune d'un théorème, et l'applicabilité de l'approche de Geiser à l'énoncé de Jordan (ou l'inverse) semble justement requérir une traduction entre géométrie et théorie des substitutions.

Pour autant, ni Jordan ni Geiser ne semblent rechercher de dictionnaire entre théorie des substitutions et géométrie. Les rapprochements disciplinaires en jeu ici forment ainsi une situation différente de celle du programme d'André Weil de partir des analogies entre théories des corps nombres algébriques, des corps de fonctions sur  $\mathbf{C}$  et des corps de fonctions sur des corps finis, puis de chercher à traduire les résultats d'une théorie dans le langage des autres afin de profiter d'un enrichissement mutuel <sup>125</sup>.

Si le rapprochement que nous avons observ e dans cet article reste finalement très mod er e, c'est peut-être aussi parce que, en 1870, la géométrie et la théorie des substitutions n'en sont pas au même stade de leur développement. Géométries synthétique et analytique pour le lien entre surfaces cubiques et courbes quartiques, théorie des représentations de surfaces et principe des rayons réciproques pour le lien entre surfaces cubiques et surfaces quartiques : la diversité des outils et des approches utilis es par Geiser pour traiter de sujets usuels <sup>126</sup> — les courbes et surfaces algébriques particulières de petit degré — reflètent l'inscription de ses travaux dans une géométrie *alla* Steiner, sans refuser pour autant des outils de géométrie

122. Extrait d'une lettre de Jordan   Klein datée du 26 juillet 1886 et conservée aux Archives de Göttingen (référence Cod. Ms. F. Klein 10).

123. Voir respectivement [45], [51, p. 201] et [16, 2]. En particulier sur Poncelet et la généralité, voir [6].

124. Voir [23] pour les points de vue d'Hermite sur ce sujet.

125. [68].

126. Voir les chapitres II et III de [61]. La diversité des approches en question montre d'ailleurs la sensibilité de Geiser à la multiplicité de preuves, ici à l'intérieur de la géométrie.

analytique<sup>127</sup> : ils s’ancrent ainsi dans une certaine continuité des développements géométriques de l’époque.

Au contraire, l’approche par Jordan des liens en question est originale pour deux raisons. D’abord, elle se place dans une théorie de Galois que Jordan, *via* le *Traité des substitutions* et les articles l’annonçant, est en train de remodeler et de dépasser, au point de faire de son ouvrage un jalon conceptuel dans le développement des idées de Galois<sup>128</sup>. Ensuite, si l’on se réfère à l’article sur les « équations de la géométrie » de l’*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, c’est la première fois que la théorie des substitutions est appliquée à ces équations algébriques issues de la géométrie<sup>129</sup>. Notre étude de cas se situe ainsi à un moment charnière à la fois du développement de la théorie des groupes et du rapprochement de celui-ci avec la géométrie. Un autre moment fort de ce développement, centré autour de Klein, se situe dans le futur proche de cette étude.

En effet, toujours d’après le même article de l’*Encyklopädie*, le premier travail liant théorie des substitutions et géométrie publié après le *Traité des substitutions* est un article de Klein, paru en 1871 et intitulé « Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen<sup>130</sup> ». Il s’ouvre ainsi :

« La théorie générale des équations algébriques est illustrée de la plus belle des façons par des exemples géométriques particuliers ; je rappelle seulement (cf. Camille Jordan. *Traité des Substitutions*. Paris 1870, p. 310 et suiv.) le problème des points d’inflexion des courbes du troisième ordre, les 28 tangentes doubles des courbes du quatrième ordre, les 27 droites sur les surfaces du troisième degré etc. [...] Le grand avantage de ces exemples est qu’ils présentent de façon intuitive les idées abstraites en soi si particulières de la théorie des substitutions<sup>131</sup>. » [37, p. 346]

Klein poursuit en présentant l’idée qu’il souhaite mettre en œuvre : obtenir une « image géométrique » pour toutes les équations algébriques, en incarnant les racines d’une équation en objets géométriques et en remplaçant les permutations des racines par des transformations de l’espace échangeant entre eux ces objets. Ces mêmes idées sont à nouveau exprimées un an plus tard dans le *Programme d’Erlangen*, dans lequel Klein explique vouloir construire une théorie des groupes de transformations liée à la géométrie tout comme la théorie des substitutions a été construite, en particulier dans le *Traité des substitutions*, en liaison avec la théorie des équations. Le *Programme* évoque en particulier une notion d’adjonction d’un objet géométrique et du comportement des transformations vis-à-vis d’une telle adjonction :

127. Rappelons que dans le *Jahrbuch* de 1870, la théorie des représentations de surfaces est classée parmi la géométrie analytique.

128. Voir [13, p. 173-182].

129. [31, p. 518]. Nous avons vérifié que parmi les références données dans cet article, le *Traité des substitutions* et ses avatars sont les premiers où la théorie des substitutions est appliquée aux équations issues de la géométrie. Les références antérieures sont des travaux où ces équations sont étudiées avec les techniques de la théorie des équations comme la recherche et la formation explicite de résolvantes ; on n’y trouve pas d’articulation avec la géométrie comme celle que nous avons vues.

130. En français : « Sur une représentation géométrique des résolvantes d’équations algébriques ». [37].

131. « Die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen wird in schönster Weise durch eine Anzahl besonderer geometrischer Beispiele illustriert ; ich erinnere nur (vgl. Camille Jordan. *Traité des Substitutions*. Paris 1870, S. 301 ff.) an das Problem der Wendepunkte der Kurven dritter Ordnung, an die 28 Doppeltangenten der Kurven vierter Ordnung, an die 27 Linien auf den Flächen dritten Grades usw. [...] Der hohe Nutzen dieser Beispiele liegt darin, daß sie die an und für sich so eigenartig abstrakten Vorstellungen der Substitutionstheorie in anschaulicher Weise dem Auge vorführen. »

« On donne une multiplicité<sup>132</sup> et, pour en faire l’étude, un de ses groupes de transformations. Soit propos e d’étudier les êtres de la multiplicité eu égard à l’un d’eux. *On peut alors adjoindre celui-ci à l’ensemble des êtres et rechercher, au sens du groupe donn e, les propriétés du système complet, soit ne rien adjoindre, mais borner les transformations prises pour base de l’étude à celles du groupe donn e qui n’altèrent pas l’être consid er e (et qui forment nécessairement un groupe).* » [41, p. 9]

Cela semble nous donner une clé, que le lecteur aura peut-être utilisée spontanément, d’une traduction géométrique des liens de Jordan que nous avons  etudi es ici.

Notre étude de cas permet donc de saisir un rapprochement entre théorie des groupes et géométrie survenant juste avant que Klein commence à s’emparer de ces sujets. Parce qu’ils se sont finalement impos es, les points de vue klein ens peuvent induire des biais dans notre lecture des travaux de Jordan et de Geiser sur les liens unissant les vingt-sept droites des surfaces cubiques, les vingt-huit tangentes doubles des courbes quartiques et les seize droites des surfaces quartiques à conique double. Mais ces travaux font justement partie des sources d’inspiration majeures de Klein : les étudier en détail permet de comprendre sur quels aspects le regard avec lequel nous sommes tent es de les lire est anachronique, mais surtout de mettre en évidence quelle barrière exacte Klein a dû franchir pour que géométrie et groupes (de transformations) fusionnent en une seule discipline.

#### RÉFÉRENCES

- [1] Lise BIOESMAT-MARTAGON : *Eléments d’une biographie de l’Espace projectif*. Presses Universitaires de Nancy, Nancy, 2011.
- [2] Henk J. M. BOS, Cees KERS, Frans OORT et Raven DIEDERICK : Poncelet’s closure theorem. *Expositiones Mathematicae*, 5:289–364, 1987.
- [3] Nicolas BOURBAKI : *Eléments d’histoire des mathématiques*. Springer, Berlin Heidelberg, 2007. réimpression inchangée de l’édition originale de 1984.
- [4] Frédéric BRECHENMACHER : Self-portraits with Évariste Galois (and the shadow of Camille Jordan). *Revue d’Histoire des Mathématiques*, 17:271–369, 2011.
- [5] Arthur CAYLEY : On the triple tangent planes of surfaces of third order. *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 4:118–132, 1849.
- [6] Karine CHEMLA : Lazare Carnot et la généralité en géométrie. Variations sur le théorème dit de Menelaus. *Revue d’Histoire des Mathématiques*, 4:163–190, 1998.
- [7] Alfred CLEBSCH : Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 63:189–243, 1864.
- [8] Alfred CLEBSCH : Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 65:359–380, 1866.
- [9] Alfred CLEBSCH : Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 69:142–184, 1868.
- [10] Alfred CLEBSCH : Zum Gedächtniss an Julius Plücker. *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 16:1–40, 1872.
- [11] Alfred CLEBSCH† : Rudolf Friedrich Alfred Clebsch – Versuch einer Darlegung und W urdi-  
gung seiner wissenschaftlichen Leistungen. *Mathematische Annalen*, 7:1–55, 1873.  crit par  
Alexander von BRILL, Paul GORDAN, Felix KLEIN, Jacob L UROTH, Adolph MAYER, Max NÖ-  
THER et Karl von der M UHLL.
- [12] Leo CORRY : *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Birkhäuser, Basel ·  
Boston · Berlin, 2 e édition, 2004.
- [13] Caroline EHRHARDT : *Itinéraires d’un texte mathématique – Les r elaborations des écrits  
d’Évariste Galois au XIX e siècle*. Hermann, Paris, 2012.
- [14] Arnold EMCH : Carl Friedrich Geiser. *National Mathematics Magazine*, 12:286–289, 1938.

<sup>132</sup>. Le mot original est « Mannigfaltigkeit » (voir [38, p. 9]), que l’on traduit plus volontiers par « variété ».

- [15] Gerd FISCHER : *Mathematische Modelle*. Vieweg, Braunschweig, 1986.
- [16] Jean-Pierre FRIEDELMEYER : Le théorème de clôture de Poncelet, une démonstration « imparfaite », qui fait toute une histoire... Dans Évelyne BARBIN et Dominique BÉNARD, éditeurs : *Histoire et enseignement des mathématiques – Rigueurs, erreurs, raisonnements*, pages 229–261. Institut National de Recherche Pédagogique – Université Blaise-Pascal de Clermont-Ferrand (IREM), 2007.
- [17] Évariste GALOIS : Œuvres mathématiques. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 11(1):381–444, 1846.
- [18] Sébastien GAUTHIER : *La géométrie des nombres comme discipline (1890-1945)*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 2007.
- [19] Carl Friedrich GEISER : Ueber eine geometrische Verwandtschaft des zweiten Grades. *Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern*, 580-602:97–107, 1865.
- [20] Carl Friedrich GEISER : *Einleitung in die synthetische Geometrie*. Teubner, Leipzig, 1869.
- [21] Carl Friedrich GEISER : Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades. *Mathematische Annalen*, 1:129–138, 1869.
- [22] Carl Friedrich GEISER : Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 70:249–257, 1869.
- [23] Catherine GOLDSTEIN : Un arithméticien contre l'arithmétisation : les principes de Charles Hermite. Dans Dominique FLAMENT et Philippe NABONNAND, éditeurs : *Justifier en mathématiques*, pages 129–165. Maison des Sciences de l'Homme, Paris, 2011.
- [24] Catherine GOLDSTEIN, Norbert SCHAPPACHER et Joachim SCHWERMER, éditeurs. *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*. Springer, Berlin, 2007.
- [25] Jeremy GRAY : *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*. Birkhäuser, Boston, 2<sup>e</sup> édition, 2000.
- [26] Robin HARTSHORNE : *Algebraic Geometry*. Springer, New-York, 1977.
- [27] Thomas HAWKINS : The Erlanger Programm of Felix Klein : Reflexions on its place in the history of mathematics. *Historia Mathematica*, 11:442–470, 1984.
- [28] Archibald HENDERSON : *The Twenty-Seven Lines upon the Cubic Surface*. Hafner publishing Co., New-York, 1911.
- [29] Otto HESSE : Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen 9ten Grades, deren Wurzeln die Eigenschaft haben, dass eine gegebene rationale und symmetrische Function  $\theta(x_\lambda, x_\mu)$  je zweier Wurzeln  $x_\lambda, x_\mu$  eine dritte Wurzel  $x_k$  giebt, so dass gleichzeitig :  $x_\chi = \theta(x_\lambda, x_\mu)$ ,  $x_\lambda = \theta(x_\mu, x_\chi)$ ,  $x_\mu = \theta(x_\chi, x_\lambda)$ . *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 34:193–208, 1847.
- [30] Otto HESSE : Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie ; insbesondere auf Curven vierter Ordnung. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 49:243–264, 1855.
- [31] Otto HÖLDER : Galois'sche Theorie mit Anwendungen. Dans *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, volume I. 1, chapitre B. 3. c, d, pages 480–520. Teubner, Leipzig, 1899.
- [32] Camille JORDAN : Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 14(2):147–166, 1869. repr. dans [36, p. 249-268].
- [33] Camille JORDAN : Sur les équations de la géométrie. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 68:656–659, 1869. repr. dans [36, p. 199-202].
- [34] Camille JORDAN : *Traité des Substitutions et des équations algébriques*. Gauthier-Villars, Paris, 1870.
- [35] Camille JORDAN : *Notice sur les Travaux de M. Camille Jordan*. Gauthier-Villars, Paris, 1881.
- [36] Camille JORDAN : *Œuvres de Camille Jordan*, volume 1. Gauthier-Villars, Paris, 1961-1964. Publié sous la direction de M. Gaston Julia, par M. Jean Dieudonné.
- [37] Felix KLEIN : Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen. *Mathematische Annalen*, 4:346–358, 1871.
- [38] Felix KLEIN : *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Erlangen. Andreas Deichert, 1872.
- [39] Felix KLEIN : *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*. Teubner, Leipzig, 1884.
- [40] Felix KLEIN : *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, volume 2. Springer, Berlin, 1922. Édité par Robert FRICKE et Hermann VERMEIL.

- [41] Felix KLEIN : *Le Programme d'Erlangen*. Jacques Gabay, Paris/Bruxelles/Montréal, 1974. Traduction française de [38], préface de Jean DIEUDONNÉ.
- [42] Louis KOLLROSS : Prof. Dr. Carl Friedrich Geiser. *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft*, 115:521–528, 1934.
- [43] François L E : Sur les vingt-sept droites des surfaces cubiques. Mémoire de D.E.A.,  cole Normale Supérieure de Lyon – Université Claude Bernard Lyon 1, 2011. [http://www.math.jussieu.fr/~lef/Accueil\\_files/Memoire.pdf](http://www.math.jussieu.fr/~lef/Accueil_files/Memoire.pdf).
- [44] Henri LEBESGUE : Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan. *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, 58:XXXIX–LXVI, 1926.
- [45] Franz LEMMERMEYER : *Reciprocity Laws – From Euler to Eisenstein*. Springer, Berlin Heidelberg New-York, 2000.
- [46] Gino LORIA : *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*. Carlo Clausen, 2 e édition, 1896.
- [47] Paul MANSION : Notice sur les travaux de Jules Plücker. *Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, 5:183–212, 1872. Traduction de [10].
- [48] Wilhelm Fritz MEYER : Flächen dritter Ordnung. Dans *Encyklop die der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, volume III. 2. 2. B, chapitre C 10 a, pages 1437–1531. Teubner, Leipzig, 1928.
- [49] George Abram MILLER, Leonard Eugene DICKSON et Hans Frederick BLICHFELD : *Theory and Applications of Finite Groups*. John Wiley & sons, New-York, 1 re  dition, 1916.
- [50] Olaf NEUMANN : The *Disquisitiones Arithmeticae* and the theory of equations. Dans [24], chapitre II.1, pages 107–127. 2007.
- [51] Elena Petrovna OZHIGOVA : Problems of number theory. Dans Andre  Nikola evitch KOLMOGOROV et Adolph-Andre  Pavlovich YUSHKEVICH,  diteurs : *Mathematics of the 19th Century*, volume 1 : Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory, chapitre 3, pages 137–209. Birkhäuser, Basel · Boston · Berlin, 2 e édition, 2001. avec l'aide de A.P. YUSHKEVICH.
- [52] Birgit PETRI et Norbert SCHAPPACHER : On arithmetization. Dans [24], chapitre V.2, pages 343–374. 2007.
- [53] Julius PLÜCKER : Géométrie analytique. Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés. *Annales de Mathématiques pures et appliqu es*, 19:97–106, 1828-1829.
- [54] Julius PLÜCKER : Géométrie analytique. Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés. *Annales de Mathématiques pures et appliqu es*, 19:129–137, 1828-1829.
- [55] Theodor REYE : *Leçons sur la géométrie de position*. Dunod, Paris, 1882. Traduction française par Octave CHEMIN.
- [56] George SALMON : On the triple tangent planes to a surface of the third order. *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 4:252–260, 1849.
- [57] George SALMON : *A Treatise on the higher plane curves*. Hodges and Smith, Dublin, 1 re  dition, 1852.
- [58] George SALMON : *A Treatise on the analytic geometry of three dimensions*. Hodges, Figgis & co, Dublin, 4 e  dition, 1882.
- [59] Ludwig SCHL AFLI : An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order and to divide them into species in reference to the reality of the lines upon the surface. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 2:55–65, 110–120, 1858.
- [60] Heinrich SCHR OTER : Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 62:265–280, 1863.
- [61] Fritz SCHÜTTE : *Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwicklung*. Teubner, Leipzig, 1888. Traduction de la 1 re  d. de [46].
- [62] Joseph-Alfred SERRET : *Cours d'Algèbre supérieure*. Mallet-Bachelier, Paris, 2 e édition, 1854.
- [63] Jacob STEINER : Ueber die Flächen dritten Grades. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 53:133–141, 1856.
- [64] James Joseph SYLVESTER : Note sur les 27 droites d'une surface du 3 e degré. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 52:977–980, 1861.
- [65] James Joseph SYLVESTER : Outline trace of the theory of reducible cyclodes. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2:137–160, 1869.
- [66] Bartel Leendert van der WAERDEN : *A History of Algebra*. Springer, Berlin Heidelberg, 1985.

- [67] Heinrich WEBER : *Lehrbuch der Algebra*, volume 2. Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 2<sup>e</sup> édition, 1898.
- [68] André WEIL : Une lettre et un extrait de lettre à Simone Weil. *Dans Œuvres scientifiques*, volume 1, pages 244–255. Springer, New-York, 1979.
- [69] Hans WUSSING : *Die Genesis des abstrakten Gruppen Begriffes*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969.

Manuscrit reçu le 18 octobre 2012,  
révisé le 19 mars 2013,  
accepté le 20 avril 2013.

François LÊ  
Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 4 place  
Jussieu, 75005 Paris  
lef@math.jussieu.fr